

Le competenze dei bambini di prima elementare: un approccio all'aritmetica

Pubblicato: AA. VV. (2004). Le competenze dei bambini di prima elementare: un approccio all'aritmetica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 47-95.

Lucia Baldazzi (Porto Fuori, Ra), Luigia Cottino (Milano), Erminia Dal Corso (Lugo, Vr), Bruno D'Amore (Bologna), Martha Isabel Fandiño Pinilla (Bologna), Margherita Francini (Arezzo), Rita Fusinato (Verona), Claudia Gualandi (Milano), Giuliana Liverani (Classe, Ra), Farida Magalotti (Cervia, Ra), Anna Maria Maraldi (Cesena, Fc), Ines Marazzani (Colfiorito, Pg), Anna Rita Monaco (Roma), Gabriella Pacciani (Arezzo), Adriana Ponti (Milano), Laura Prosdocimi (Rimini), Chiara Stella (Verona), Anna Traverso (Momperone, Al), Nadia Vecchi (Tollegno, Bi).

RSDDM

[Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica della Matematica e di Divulgazione della Matematica]
c/o Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Lavoro eseguito nell'ambito del Programma di Ricerca dell'Unità di Bologna: «*Ricerche sul funzionamento del sistema: allievo-insegnante-sapere: motivazioni della mancata devoluzione*», inserito nel Programma di Ricerca Nazionale: «*Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*», cofinanziato con fondi MIUR nel 2003.

Abstract. *This paper treats of a research-experimentation carried out in many places in the North and the Middle of Italy, with first grade students. The purpose of the experimentation was to put into practice some educational strategies about arithmetic, which would take into great consideration the real skills of children about numbers and operations, without forcing them in going through the most typical and widespread way: a very long and slow sequence of banal considerations on "small" numbers. The proposal planned to begin immediately with big numbers with some complexity. The purpose of the experimentation was to prove that this is not just*

possible, but educationally and cognitively winning. It is analysed not only the behaviour of the children, but also of the teachers involved in the experimentation, pointing out the educational worries and their overcoming.

Resumé. *Cette recherche présente les résultats d'une expérimentation conduite dans plusieurs écoles élémentaires de l'Italie du Nord et du Centre. Le but de l'expérimentation était produire et de mettre en oeuvre des stratégies didactiques relativement à l'enseignement de l'arithmétique. Il s'agissait de prendre en compte les compétences réelles des élèves à l'égard de leurs connaissances des nombres et des opérations et sans les contraindre à adopter les algorithmes classiques (et souvent fastidieux) principalement développés à partir de petits nombres. Le dispositif prévoyait d'introduire rapidement des grands nombres assurant ainsi une certaine complexité aux situations proposées. Le but de la recherche était de montrer que ce type d'enseignement était non seulement possible, mais qu'il était didactiquement et cognitivement performant. Enfin, signalons que les analyses présentées ici ne s'arrêtent pas aux seules conduites des enfants, mais se centrent aussi sur les préoccupations didactiques des professeurs impliqués dans cette expérimentation et sur les conditions de leur dépassement.*

Resumen. *En este trabajo se habla de una investigación – experimentación conducida en varias localidades del Norte y Centro de Italia, en primero de primaria. El objetivo de la experimentación era el de poner en acto estrategias didácticas sobre la aritmética que tuvieran en verdadera consideración las reales competencias de los niños sobre números y operaciones, sin obligarlos a tener que recorrer el camino más común y difundido: una larga y lentísima cadena de banales consideraciones con números “pequeños”. La propuesta preveía partir súbitamente de números grandes y de una cierta complejidad. El objetivo de la investigación era demostrar que la cosa no solo es posible, sino que es didáctica y cognitivamente ganadora. Se analiza no solo el comportamiento de los niños, sino también la actitud de los maestros que participaron en la experimentación y la forma como éstas fueron superadas.*

Sunto. *In questo lavoro si parla di una ricerca - sperimentazione condotta in molte località italiane del Nord e del Centro, in prima elementare. Lo scopo della sperimentazione era quello di mettere in atto strategie didattiche sull'aritmetica che prendessero in seria considerazione le reali competenze dei bambini su numeri e operazioni, senza costringerli a dover percorrere la strada più tipica e diffusa: una lunga e lentissima sequela di banali considerazioni su numeri “piccoli”. La proposta prevedeva di partire subito da numeri grandi e di una certa complessità. Lo scopo della ricerca era dimostrare che la cosa non solo è possibile, ma che è didatticamente e cognitivamente vincente. Non si analizza solo il comportamento dei bambini, ma pure quello degli insegnanti coinvolti nella sperimentazione, evidenziandone le preoccupazioni didattiche ed il loro superamento.*

1. Il quadro teorico della sperimentazione e della ricerca

C'è una contraddizione lampante che si evidenzia nell'esordio dell'apprendimento della matematica, in prima elementare, almeno in Italia.

■ Da un lato, l'allievo ha frequentato nel 94% dei casi (secondo le statistiche nazionali) la scuola dell'infanzia nella quale è prassi oramai consolidata parlare e far parlare parecchio dei numeri, nell'ambito del "campo di esperienza" *Spazio, ordine, misura*. Per scegliere le attività matematiche (aritmetiche, in particolare) più adatte ai bambini di fine scuola dell'infanzia – inizio scuola elementare, ci siamo serviti del riferimento "classico" per il nostro gruppo (D'Amore, 1980) e, tra le molte altre pubblicazioni che raccontano esperienze del gruppo, dei seguenti testi: Agli, D'Amore (1995), Agli, Martini (1989, 1995), D'Amore (1994) e di altri. È sulla base di questa lunga militanza di sperimentazione e ricerca nella scuola dell'infanzia (oltre 30 anni documentati), nonché sulla base della continua frequentazione degli insegnanti di tale livello scolastico (per esempio, attraverso i 17 Convegni di Castel San Pietro e la rivista *Scuola dell'Infanzia* con la quale molti del gruppo collaborano in modo stretto) che possiamo affermare quanto segue, tanto da usarlo come base per la successiva ricerca – sperimentazione.

I bambini, oltre che contare e trattare i numeri con una discreta competenza, sanno eseguire addizioni e sottrazioni. La tecnica di addizione è spesso di tipo ordinale: se il bambino deve fare $5+6$ si posiziona su un 5 che fa idealmente corrispondere allo 0 ordinale e poi esegue un'addizione di tipo... peaniano:

$$5+1_{(1)}+1_{(2)}+1_{(3)}+1_{(4)}+1_{(5)}+1_{(6)},$$

aggiungendo cioè 1 per più volte, contando 6 volte l'aggiunta di 1, fino ad arrivare alla somma voluta. Lo fa con destrezza, con sicurezza, spesso aiutandosi con uno strumento eccellente, le dita delle mani, dicendo a voce alta il numerale raggiunto di volta in volta, facendo scorrere le dita-unità fino alla sesta. Alla fine, dice a voce più alta, o ripete, la somma finale (questo comportamento, è stato evidenziato anche da Gérard Vergnaud, che l'ha classificato come *schema*, quando parla di *teoremi in atto*, 1981).

I bambini usano il calendario come strumento aritmetico ed arrivano a stabilire complesse strategie risolutive (anche molto personali) per rispondere alla domanda: «Oggi è il 28 di marzo; tra 6 giorni andremo a teatro. Che giorno andremo a teatro?». Rispondere a questa domanda necessita di una competenza piuttosto profonda che prevede non l'uso banale dell'addizione $28+6$, bensì un comportamento strategico che tenga conto anche del numero dei giorni del mese di marzo; il risolutore deve cioè coordinare l'addizione che deve eseguire con altri dati.

I bambini giocano al mercato e quindi pagano, danno somme, aggiungono, danno resti... Lo fanno con sicurezza e con maestria, basta osservarli.

I bambini passeggiano per il quartiere cercando numeri di qualsiasi tipo, li leggono, li commentano, li trascrivono in aula ed in casa.

I bambini leggono e scrivono numeri anche di più cifre, li sanno confrontare anche mettendo in campo strategie complesse (Agli, Martini, 1995; Lucangeli, 2001; Teruggi, 2001).

I bambini sanno risolvere semplici problemi di addizione e di sottrazione, mettendo in campo strategie aritmetiche, grafiche ed altre (Baldisserri, D'Amore, Fascinelli, Fiori, Gastaldelli, Golinelli, 1993).

Eccetera.

Tutto ciò *dimostra* dunque che i bambini di 5 anni sanno maneggiare e sono piuttosto abili di fronte a questioni numeriche, *anche* se si trovano di fronte a numeri con più cifre.

Non è un caso, dunque, che all'inizio del tema *Aritmetica* nei Programmi ministeriali italiani per la scuola elementare del 1985, si faccia richiamo a non considerare i bambini in ingresso come se fossero del tutto privi di competenze numeriche; tali programmi invitano anzi a *procedere* nell'azione didattica *basandosi* proprio su tali competenze già acquisite (una volta verificate). Anche nel testo dell'attuale riforma italiana (scriviamo nel 2003) ci sono analoghi inviti, dettati dall'esperienza e dal buon senso.

■ Dall'altro lato, però, e nonostante i vari Progetti nazionali che da molto tempo spingono contro questa corrente (Boero et al., 1985), è prassi consolidata degli insegnanti e sancita dunque da tale consuetudine [che viene riaffermata anche nell'editoria del parascolastico più banale e più diffusa, in molti progetti senza specifici controlli, né scientifici né tanto meno didattici], che si inizi con raccolte di 1 pulcino, di 2 uova, di 3 fiori e così via, in una situazione che definire ingenua e sottostimante è

dir poco. Sugli indubbi vantaggi che hanno approcci più complessi e significativi nella costruzione del numero, legati ai “campi di esperienza”, si può vedere (Scali, 1994; Boero, Scali, 1996)

È ovvio che il bambino accetta questo stato di cose, quale che sia il tipo di *situazione* nella quale si trova a vivere questi suoi primi contatti con il mondo della scuola, dato che non può far altro. La sua situazione non gli permette di mettere in campo le proprie esperienze. Sappiamo bene che il suo *sapere personale* deve compiere un lungo processo prima di essere istituzionalizzato (Chevallard, 1989) e non è detto che lo sarà mai; c'è sempre, in effetti, il pericolo della *scolarizzazione dei saperi* (D'Amore, 1996).

■ Se l'insegnante opera in “situazione didattica” (D'Amore, 1999, 2001; questa citazione vale qui per tutti i termini di didattica della matematica che verranno usati e non spiegati, messi tra virgolette alte), il bambino gioca subito il suo ruolo che *non* è quello di apprendere, ma di cercare di capire che cosa vuol sentirsi dire l'insegnante allo scopo di ottenere:

a. quella valutazione positiva tanto attesa dalla “noosfera”;

b. il compiacimento e dunque l'attenzione gratificante dell'insegnante.

Ed è una situazione cognitivamente così semplice, che egli vi gioca subito da vincente: impara presto che il suo *mestiere di allievo* è capire quel che si vuole da lui, non costruire conoscenza. Se si rivela socialmente vincente il banale fatto che egli dica 1, 2, 3 di fronte ad insulsi disegni, lui imparerà a farlo. Dopo qualche tentativo di mettere in campo le sue vere competenze, accetterà di riconoscere e soddisfare le “attese dell'insegnante”; è la definizione di “contratto didattico” (Brousseau, 1986; D'Amore, 1999, 2001, 2003).

■ Se l'insegnante opera in “situazione a-didattica”, il bambino accetta la “devoluzione” e “si implica”, ma non costruisce reale sapere, dato che si tratta di saperi già posseduti, ed al più li rafforza. In questo caso, sentendosi più libero, nella fase di “validazione” potrebbe anche tentare di mettere in campo il proprio “sapere personale”; ma a questo punto sta al ‘coraggio’ del maestro: raccogliere la proposta e farla discutere collettivamente, oppure bloccarla sul nascere. Ci siamo accorti che, spesso, il maestro preferisce affidarsi a manuali ripetitivi ed alla consuetudine (che vuole passi minimi ed infantili) a causa di una supposta presenza di bambini non ancora abbastanza competenti in aula. Su questo punto dovremo fare alcune considerazioni critiche nel seguito di questo articolo, giacché alcuni degli autori, che si riconoscevano in

questa caratterizzazione, hanno dovuto superarla per dar vita ad una didattica più significativa e produttiva (con molta titubanza iniziale, ma con molta soddisfazione finale).

Ci sono due punti importanti da discutere, alla luce di questa considerazione preliminare.

Primo punto.

Quali sono le immagini di scuola e di matematica che ricava lo studente da un tale atteggiamento infantile? La cosa è ovvia: la scuola è luogo di saperi banali e ridondanti, senza sfide intellettuali, luogo della ripetizione e dell'imitazione, luogo da esercizi e non da problemi. Tutto a scuola è falso: il mondo reale è quello fuori, a scuola bisogna fingere. Fingere interesse per banalità infantili, fingere di apprendere cose invece già risapute, fingere di non essere interessati a quel che succede fuori. E, senza ripetere, ma solo circostanziando un po', lo stesso vale per la matematica. A scuola non vale l'attività di ragionare o creare: bisogna fare quello che dice il maestro, e questo è uno dei motivi per cui il maestro, il suo parere, il suo giudizio, le sue proposte sono non scalzabili a casa: il maestro detta, in più sensi, la legge.

Secondo punto.

A che cosa è servito l'impegno didattico della scuola dell'infanzia; a che cosa servono le competenze personali acquisite fuori dal mondo della scuola elementare? Lo studente capisce subito di non potersi servire del proprio patrimonio di competenze, comunque acquisite. Capisce che deve saper scegliere presto tra le competenze spendibili in aula e quelle che deve lasciare fuori di essa. Ben presto diventa questo il suo principale impegno, il suo *mestiere di allievo*.

Entrambi questi punti portano alla *scolarizzazione* delle conoscenze e delle relazioni (D'Amore, 1996), cioè alla rinuncia consapevole delle scelte culturali: «Con il termine "scolarizzazione del sapere" intendo qui riferirmi a quell'atto in larga misura inconsapevole, attraverso il quale l'allievo, ad un certo punto della sua vita sociale e scolastica (ma quasi sempre nel corso della Scuola Elementare) delega alla Scuola (come istituzione) ed all'insegnante di scuola (come rappresentante dell'istituzione) il compito di *selezionare per lui i saperi significativi* (quelli che lo sono socialmente, per status riconosciuto e legittimato della noosfera), rinunciando a farsi carico diretto della loro scelta in base a qualsiasi forma di criterio personale (gusto, interesse, motivazione,...).

Poiché questa scolarizzazione comporta il riconoscimento dell'insegnante come depositario dei saperi che socialmente contano, è anche ovvio che vi è, più o meno contemporaneamente, una scolarizzazione dei rapporti interpersonali (tra studente ed insegnante e tra studente e compagni) e del rapporto tra lo studente ed il sapere: è quel che [...] si chiama “scolarizzazione delle relazioni”».

Questo processo che, di solito, inizia proprio nella scuola elementare, ha negative ripercussioni nel seguito dell'iter scolastico e diventa “mortale” durante la scuola media, come è stato da più parti rilevato.

2. Preliminari alla proposta di sperimentazione e di ricerca

Le riflessioni precedenti, che fanno capo tanto a considerazioni teoriche tratte dall'ambito della ricerca in didattica della matematica quanto a riflessioni mature da parte di insegnanti sensibili, fanno parte della premessa d'innovazione che due degli autori di questo testo hanno proposto in due Paesi distanti geograficamente, ma scolasticamente situati nella stessa ambiguità... aritmetica, Colombia ed Italia (va detto che in tali Paesi la moneta in circolazione fino al 2001 era più o meno equivalente: 1 peso = 1,07 lire; l'Italia ha poi adottato l'euro, mentre in Colombia, stante il valore commerciale del peso, i bambini sono costretti a maneggiare fin da piccoli centinaia e migliaia di unità monetarie; ciò anche perché i bambini devono comprarsi da sé, fin dalla scuola elementare, merende e pasti durante la giornata scolastica, non esistendo quasi mai una mensa all'interno delle strutture scolastiche). I due ricercatori, una colombiana ed uno italiano, hanno proposto ad insegnanti dei rispettivi Paesi di formare due gruppi di studio che cercassero alternative culturalmente e prasseologicamente significative a questa situazione di contraddizione cognitiva.

Questo testo intende narrare la situazione sperimentale in Italia.

Nel 1999 il gruppo di studio si è formato; esso comprendeva i due ricercatori detti (entrambi docenti universitari) e 22 insegnanti elementari; con il trascorrere del tempo, il numero 22 si è ridotto a 17.

Sono state fatte riunioni di studio, esaminate proposte, studiata bibliografia, fino a che il gruppo si è formalizzato sotto la denominazione di “Numeri grandi”, nell'ambito del RSDDM di Bologna.

Il gruppo dei 19 (17+2) sperimentatori - ricercatori ha concepito, costruito e poi effettuato diverse prove in aula, sia di carattere

semplicemente dialogico, sia sotto forma di test scritti, sempre rigorosamente in prima elementare, nei primi mesi dell'anno scolastico 2001-2002, al solo scopo di raccogliere materiali attendibili ed informazioni da vagliare e delle quali tenere debito conto.

Nel contempo, alcuni dei 17 sperimentatori effettuavano anche prove in classi di scuola dell'infanzia, anche con modalità di ricerca (Marazzani, 2000, 2001).

Non daremo qui tutti i dettagli dei risultati quantitativi, mentre tenteremo una semplice statistica di essi, a puro scopo orientativo.

3. La prova preliminare ed i risultati, con commenti

Il lavoro è stato svolto in quasi tutti i casi singolarmente, bambino per bambino, fuori dall'aula, da alcune delle maestre sperimentatrici autrici del presente articolo. Poiché non tutti i bambini sapevano leggere, erano le maestre che leggevano il testo ai soggetti sottoposti alla prova.

Ed ecco in dettaglio i test dei 3 test proposti, i singoli andamenti percentuali (arrotondati all'unità) ed alcuni commenti.

I test. Bambini sottoposti alla prova: 134.

In un foglio A4 sono scritti in modo sparso i seguenti numerali: 3, 15, 327, 32, 51. Le domande sono: Qual è il numero più grande? Perché? Qual è il numero più piccolo? Perché?

	il più grande è	il più piccolo è
3		116 (87%)
15	2	
327	127 (95%)	
32	3	1
51	1	1
non risponde	1	16

Si rileva con evidenza che la stragrande maggioranza dei bambini intervistati all'inizio della prima elementare sa riconoscere ed indicare, in una raccolta di 5 numerali, il più grande ed il più piccolo, con qualche leggero deficit per quest'ultima richiesta. Si deve anche osservare che circa il 79% dei bambini è in grado di riconoscere *entrambi*.

Tra le risposte più frequenti alla domanda sul perché delle scelte, i bambini, con frasi e modalità diverse, mettono in campo il numero delle

cifre che compongono i numerali scelti. Si tratta di una strategia vincente che però lascia dubbi sull'efficacia: che cosa succederebbe se vi fossero *solo* numerali con lo stesso numero di cifre? E, ancora peggio, se vi fossero numerali con le *stesse* due cifre, scritte nell'ordine scambiato? Ha senso sottoporre alla prova i bambini che hanno dato risposta positiva al test 1.

Queste domande sono all'origine del test 2.

II test. Bambini sottoposti alla prova: 102.

Su un foglio A4 sono scritti nel seguente ordine in orizzontale, ben staccati tra loro, i seguenti numerali: 32, 51, 15. Le domande sono identiche alle precedenti.

	il più grande è	il più piccolo è
32	20	18
51	70 (69%)	9
15	10	52 (51%)
non risponde	2	23

Certo, la percentuale si abbassa dal 95% al 69%, ma resta comunque alta anche in condizioni così complesse; e la positività della situazione è confermata dal fatto che il 46% dei bambini dice esattamente entrambi i numerali, il più alto ed il più piccolo.

Ed è generalmente ottima la motivazione della risposta, quando viene chiesta, perché mette bene in evidenza che la scelta non è solo dovuta al numero delle cifre in gioco, ma al fatto che «il 5 del 51 è più grande». Si esprime dunque buona se non totale consapevolezza del fatto che, tra le 2 cifre di un numerale a 2 cifre, quella che dà l'ordine di grandezza più rilevante è la prima.

Resta il problema di stabilire se c'è o no anche una certa qual consapevolezza e padronanza dei numeri grandi, che cosa esprimano, quale i bambini scelgono per determinate situazioni ecc. Abbiamo voluto fare una prova che non sembra aver portato a grandi risultati, probabilmente legata alla sua particolare natura troppo complessa.

III test. Bambini sottoposti alla prova: 81.

Su un foglio A4 è scritto in stampatello su tre linee orizzontali:

In un anno ci sono
10 365 1000 giorni?
Come lo scrivi?

	il n° dei giorni dell'anno è
10	28 (35%)
365	21 (26%)
1000	24 (30%)
non risp. o risponde altro	8

Solo un quarto dei bambini intervistati ha una qualche idea di quel numero. Va però notato che chi risponde 1000 (30%) lo motiva dicendo che «Sono tanti». Agli sperimentatori - ricercatori è sembrato che tanto 365 quanto 1000 fossero risposte dettate dalla volontà di voler rispondere numeri grandi, mentre la risposta 10 (30%) è stata legata al fatto che tante cose vanno di 10 in 10. Tra le risposte diverse, abbiamo dei 12 e dei 7 che hanno un qualche senso, legate comunque a questioni concernenti il tempo e le attività relative effettuate nella scuola dell'infanzia.

In ogni caso, ci sembra che almeno nel 56% dei casi vi sia un dominio del 'senso' del numero.

4. Altri risultati ottenuti nella prova preliminare, con commenti

In molti casi si chiedeva ai bambini di scrivere il numero 365.

Abbiamo avuto tutte le classiche risposte documentate dalla letteratura di ricerca sull'argomento (Agli, Martini, 1995), ma ci è sembrato ricorrente più degli altri un tentativo che, seppure porti a risultati formalmente scorretti, è però indice della competenza dei bambini. Si tratta di scritture del tipo: 300605 o 30065.

Al di là del fatto che sono entrambe formalmente sbagliate, si deve notare però che la "traduzione" dal registro orale a quello scritto è molto avanzata.

A parole, "*trecento sessanta cinque*", non può che avere, agli occhi di chi non ha competenze formali, la traduzione "300605" o la più compatta "30065".

Invece di interpretare tali risposte come formalmente errate, le si interpreti alla luce di competenza acquisita ingenuamente,

informalmente, ed i risultati appaiono allora di grande rilievo: i bambini hanno già una profonda competenza semiotica, per quanto concerne la problematica della rappresentazione formale dei numeri nel sistema indiano - arabo!

In alcuni casi si è chiesto ai bambini di scrivere il numero secondo loro “più bello”.

Il senso della cosa era far sì che vi fosse libertà espressiva non condizionata da fatti formali, per verificare se i bambini avrebbero scelto un numero “piccolo” (entro la decina) o qualsiasi.

La domanda è stata ben accolta, non creando affatto sorpresa (deve ancora scattare il “contratto didattico”), e dunque la risposta è stata molto varia.

Anche se, ad onor del vero, la maggior parte delle risposte concerne numeri piccoli (d’altra parte, anche ponendo la stessa domanda ad adulti, siamo certi che quasi tutte le risposte cadrebbero entro il 20), tuttavia non sembrano esserci preclusioni cognitive o culturali.

Tanto è vero che è stata poi fatta, in modo più radicalmente esplicita, la seguente domanda:

«Qual è per te il numero più grande del mondo? Scrivilo».

E qui i bambini si sono sbizzarriti nell’enunciare a voce e per iscritto numeri grandi, con le seguenti caratteristiche più diffuse:

- nell’enunciazione dei numeri orali, vi sono spesso quelli che in passato un autore di questa ricerca ha chiamato “*nomi di numeri foneticamente ricchi*”, cioè ricchi di consonanti a suono duro; tuttavia sono presenti le parole “mille”, “milioni” e “miliardi”;
- la sintassi aritmetica dei nomi utilizzati non è sempre corretta: per esempio il nome del numerale “trecentomilaemilesettiamille” rivela uno sforzo sintattico non coronato da successo semantico;
- solo 2 bambini su oltre 100 alludono a qualche cosa che potrebbe chiamare in causa l’illimitatezza dei numeri naturali, ma senza certezze al riguardo; di fatto *nessun* bambino dice una frase del tipo: è impossibile, non esiste, non si può dire o altro;
- nella trascrizione di questi numeri, succedono le cose più strane, ma è chiarissimo che moltissimi bambini sanno che a un numero grande corrispondono molte cifre e che si possono usare gli zeri per rendere il numero sempre più grande.

Restava da verificare se la competenza dei bambini riguarda solo nomi dei numeri, grandezza etc. o anche qualche cosa di più sofisticato e significativo, come le operazioni ed il loro uso in situazioni problematiche.

Che i bambini piccoli dominino con una certa sicurezza addizioni e sottrazioni, è abbondantemente documentato dalla ricerca (Boero et al., 1984; Baldisserrri et al., 1993; Scali, 1994; Boero, Scali, 1996; Teruggi, 2001; Lucangeli, 2001) e da varie esperienze (D'Amore, 2002).

In tutte queste prove, tuttavia, è ricorrente il fatto che i numeri in gioco sono quasi sempre piccoli, sempre entro la decina.

Abbiamo allora deciso di verificare se i bambini potevano dominare (non formalmente, ma cognitivamente e logicamente) una situazione additiva con grandi numeri. Inoltre, volevamo verificare se i bambini riconoscono come operazione risolutiva l'addizione in problemi nei quali non si tratti di due soli addendi in una situazione semplice e dominabile, ma in una situazione complessa.

Ad alcune classi, dunque, è stato affidato il seguente test: «Nella nostra scuola ci sono A classi; vorremmo sapere quanti bimbi ci sono in tutto nella scuola». (Il numero A variava, di caso in caso, a seconda della realtà; ovviamente, il numero dei bambini di ciascuna classe era variabile).

Molti bambini hanno interpretato realisticamente la proposta, come una vera e propria situazione problematica, alla quale dare una risposta (ripetiamo: ancora non è scattato il “contratto didattico”). Questi bambini hanno affrontato la cosa da più punti di vista, notando la complessità della consegna, complessità dovuta soprattutto a motivi contingenti e reali. Prendiamo questo intervento come prototipo, per intenderci: «Non si può! Come facciamo a sapere quali bambine sono al bagno?» dice un bambino, «O in palestra?» conferma e rafforza l'altro.

Ma parecchi bambini semplicemente suggeriscono di fare l'addizione che, però, è per loro ordinale; e dunque ha un senso logico la proposta: «Li mettiamo tutti in palestra, in fila, così li contiamo». Qui sotto c'è un “teorema in atto”, alla Vergnaud (1981), e l'indicazione di una strategia risolutiva convincente, anche se poco efficace.

Anche questa esperienza ci rafforzava nel ritenere che fanno parte delle competenze in qualche modo *già* acquisite:

a. il dominio almeno culturale (se non formale) dei ‘numeri grandi’;

b. il dominio dei “modelli intuitivi” (Fischbein, 1985) delle operazioni di base.

5. Invito alla proposta curricolare

Sulla base di tutto quanto precede, dunque, ha senso porci il problema di rivedere daccapo la questione della “ingegneria didattica” (D’Amore, 1999, 2001) relativa al tema: *Introduzione all’aritmetica*, pensata in quel segmento curricolare che occupa *il primo anno della scuola elementare*. Si tratta cioè di trovare il modo di sfruttare le *reali* competenze di base costruite in qualche modo dagli allievi, senza svilirle e senza snobbarle, anzi valorizzandole come se costituissero un patrimonio, una dote, un tesoro.

Dopo varie riunioni di studio e discussione e dopo varie proposte ed interventi, si è deciso di sfruttare la competenza acquisita da parte nostra con le prove preliminari, per riproporle in ingresso in I elementare ai bambini, come primo impatto con l’aritmetica, senza ricalcare dunque la solita sequela di numerali dall’1 in su; si trattava invece di mettere i bambini di fronte all’impatto con ‘numeri grandi’, dando per scontato che loro li dominassero.

Nel seguito dell’articolo, dunque, presenteremo i seguenti punti.

Nel paragrafo 6 presenteremo la proposta curricolare incompleta (per brevità); chi la volesse completa può chiederla ad uno degli autori del presente articolo (ines@umbria.net). Noi ci limiteremo qui ai soli tratti salienti. Di fatto, quello presentato nel paragrafo 6 è il sunto del testo elaborato dal gruppo di ricerca per gli sperimentatori. Per brevità, omettiamo tutti i disegni che il lettore potrà facilmente immaginare.

In questa fase, ci si basa molto sul piano affettivo; il lettore dunque non si meravigli se si chiede di “disegnare” e non semplicemente di “scrivere” i numerali; non si meravigli se si chiede di “colorare” i “disegni” dei numeri... Su queste attenzioni pedagogiche non ci soffermiamo, contando sulla competenza del lettore.

Nel paragrafo 7 presenteremo i risultati della sperimentazione, dal punto di vista dei bambini, cioè della loro costruzione di sapere.

Nel paragrafo 8 presenteremo il punto di vista di insegnanti e genitori.

Nel paragrafo 9 alcune note di commento finale.

Prima di procedere, ricordiamo che nell’anno scolastico 2002-2003 hanno partecipato all’esperienza *completa* 10 classi di prima elementare, per un totale di 169 bambini.

Il testo qui presentato nel par. 6 è stato rivisto durante l'estate 2003 e verrà riutilizzato nell'anno scolastico 2003-2004 per una ulteriore sperimentazione di verifica, ancora in I elementare.

Proseguendo sulla stessa falsariga, lo stesso gruppo di sperimentatori ha elaborato materiale per la II elementare che sperimenterà sempre durante l'anno 2003-2004.

6. La proposta curricolare: sunto del testo - base della nostra sperimentazione

Sappiamo contare

Nei primi giorni di scuola è indispensabile valutare i requisiti posseduti dai bambini all'ingresso nella scuola elementare. Iniziamo con un'indagine orale, intervistando tutti i bambini. Disponiamoci seduti in cerchio in un ampio spazio e cominciamo la conversazione (si consiglia di registrare).

Conoscete qualche numero? Chi sa contare? Fino a quanto sapete contare?

Ascoltiamo le risposte di tutti e cerchiamo di stimolare i più timidi.

Terminiamo questa prima fase con un gioco.

Vediamo fino a quanto riusciamo a contare tutti insieme.

Ci prendiamo tutti per mano e facciamo un bel girotondo. Partendo da un bambino, a turno, ognuno dice il numero successivo, fino a quando qualcuno non sbaglia o non sa andare avanti. Per poter continuare il gioco il bambino che sbaglia o non sa continuare, può chiedere aiuto ad un compagno di classe dicendo: «Aiuto...». Ogni bambino può essere chiamato in aiuto una sola volta.

Continuiamo a giocare fino a quando il gioco perde di interesse o nessuno sa continuare. Interveniamo il meno possibile, per valutare meglio le capacità di ogni singolo bambino. Ascoltiamo la registrazione per individuare le eventuali difficoltà dei singoli bambini.

Numeri belli e colorati

Consegniamo ai bambini le schede di lavoro riportate di seguito. Ogni volta leggiamo insieme il comando, ed accertiamoci che tutti abbiano compreso il compito. Poi lasciamoli lavorare individualmente.

Scheda n° 1

Scrivi i numeri che conosci.

Quando il bambino consegna la scheda eseguita, verificare quali numeri scritti sanno anche leggere e con che grado di correttezza.

Scheda n° 2

Qual è il numero più bello del mondo? Di che colore è?

Disegnano.

Scheda n° 3

Qual è il numero più grande del mondo? Di che colore è?

Disegnano.

A lavoro finito intervistiamo i bambini sulle motivazioni delle scelte e registriamo sulla stessa scheda. Quando tutti i bambini hanno finito facciamo socializzare le risposte usando una modalità accattivante: per esempio, una finta televisione costruita con il cartone, attraverso la quale ogni bambino a turno espone la propria scelta.

Interessanti sono le discussioni che possono scaturire; sfruttiamole e registriamo tutte.

A caccia di numeri

Un'attività molto proficua che possiamo proporre in classe è la "classica" caccia dei numeri. Possiamo iniziare cercando i numeri in classe, nella scuola, a casa.

Finita la caccia dei numeri, torniamo in aula e inseriamo i numeri trovati, sulla linea dei numeri che costruiremo insieme ai bambini.

La linea dei numeri: dal momento che vogliamo costruirla passo passo con i bambini, dobbiamo procurarci un lungo foglio di carta. Lo appenderemo alle pareti dell'aula in modo che non dia ai bambini l'idea che inizia da una parte e finisce in un'altra. Segniamo sulla striscia di carta tanti punti tutti alla stessa distanza ed attacchiamo qua e là qualche numero. Sicuramente lo "0", che non deve essere posto all'inizio della striscia di carta, per dar modo ai bambini di poter pensare (in futuro, quando ciò avverrà spontaneamente) che ci sono "altri" numeri al di qua di quello "0". Disegniamo anche una doppia freccia sotto (o sopra) lo 0. Accordiamoci con i bambini che la caccia dei numeri non termina a scuola e che loro possono portarci da casa tutti i numeri che vogliono. Insieme troveremo il posto sulla striscia e li attaccheremo.

Non dimentichiamo di lasciare spazio fra un numero ed un altro, perché, se un bambino dovesse portarci "da fuori" qualche numero con la

virgola (possibilissimo ormai con i prezzi in euro e centesimi), dobbiamo trovargli un posto. Non lo analizziamo, per il momento; gli diamo solo un posto approfittando dell'analogia con i valori delle monete.

Quando sorgono domande da parte dei bambini, legate al desiderio di conoscere, rispondiamo ed appuntiamo quali curiosità sono emerse.

Dove abbiamo trovato i numeri

Chiediamo ad ogni bambino di rappresentare nel proprio quadernone, i numeri trovati e dove erano: con l'aiuto del disegno, ogni bambino rappresenta il posto dove ha visto il numero e scrive il numero. Oralmente chiediamo ai bambini che cosa indica il numero che sta scrivendo.

Qual è il più grande

Scheda n° 1

Scegli il numero più grande tra: 3 – 15 – 327 – 32 – 51

Scheda n° 2

Scegli il numero più piccolo tra: 3 – 15 – 327 – 32 – 51

Anche in questa fase, procediamo come nelle precedenti (intervista e socializzazione e registrazione sulla scheda).

Andiamo avanti e osserviamo in quale modo i bambini ordinano una raccolta di numeri.

Scheda n° 1

Metti in ordine i seguenti numeri dal più piccolo al più grande: 17 – 49 – 3 – 128

Scheda n° 2

Metti in ordine i seguenti numeri dal più piccolo al più grande: 17 – 49 – 3 – 128

Scheda n° 3

Metti in ordine i seguenti numeri dal più grande al più piccolo: 23 – 6 – 465 – 57

(Utilizziamo i numeri grandi emersi nelle conversazioni precedenti)

Non bisogna mai dimenticare di intervistare e socializzare e registrare.

Gioco n° 1

Unisci con una linea i numeri da 0 a 20, rispettando la successione numerica. Che cosa ottieni?

(Quando viene costruita correttamente la spezzata appare una figura).

Gioco n° 2

Unisci con una linea i numeri da 60 a 90, rispettando la successione numerica. Che cosa ottieni?

(Idem)

La carta d'identità

Andiamo ora a caccia dei numeri "personali". Fin dai primi giorni di scuola, con lo scopo dichiarato di conoscerci un po', iniziamo la compilazione di un documento che contenga tutte le caratteristiche di ogni bambino.

Pensiamo a qualcosa di simile ad una carta di identità, che vada però oltre le normali informazioni che si trovano in questo genere di documenti. Mettiamoci d'accordo con i bambini che il "nostro" documento debba avere tutto quello che li rappresenta (il numero dei dentini, il numero delle scarpe, l'altezza, quanti oggetti abbiamo nello zaino ecc...).

Primo passo da compiere è quello di far vedere ai bambini una carta d'identità vera per leggere le informazioni che vi sono riportate.

Portiamo a scuola una carta d'identità, fotocopiamola e distribuiamola ai bambini. Chiediamo ai bambini di portare a scuola la carta d'identità della mamma, del papà, ... per poterla osservare e sulla traccia di questa iniziare a scrivere la nostra.

Attraverso una discussione collettiva, proponiamo una "carta di identità" un po' particolare che conterrà anche tutte le indicazioni date dai bambini (quelle che non vengono da loro, le suggerirà opportunamente l'insegnante).

Il dialogo che naturalmente scaturirà dovrebbe essere registrato per non perdere nessun dato.

Il nostro documento andrà messo in un quaderno ad anelli che crescerà man mano con i bambini. I fogli del quaderno ad anelli andranno numerati scrivendo i numeri a fondo pagina sia in cifre sia in parole. Numeriamo le pagine a partire da 1. Stiamo valorizzando i "saperi" che i bambini hanno già. Sappiamo che il mondo e la scuola dell'infanzia hanno fatto "crescere" i bambini, e non possiamo dimenticare di valorizzare ciò che portano a noi.

Fac- simile di una carta di identità che può essere variato a seconda delle esigenze

Nome	N° telefono casa	N° scarpe
Cognome	N° cellulare	N° capelli in testa
Nato a	Altezza	N° dita di una mano
Giorno	Peso	N° dita due mani
Mese	Componenti famiglia	La mia temperatura
Anno	N° fratelli	quando sto bene
abitante a	N° sorelle	Le mie malattie:
in via	N° animali in casa	La ... era l'anno
N°	N° dentini	La ... era l'anno
paese o città	Numero dentini persi	

Iniziamo ad analizzare la carta d'identità.

L'altezza

Registriamo l'altezza dei bambini in cm. Sappiamo che nel Comune di Ravenna i bambini entrano a scuola con la "valigia" piena di conoscenze ed esperienze della scuola dell'infanzia e, tra queste, c'è la striscia delle proprie altezze che può fornire occasione di partenza e di continuità. Non tutti gli alunni entrano nella scuola elementare con la "valigia". Invece di pensare a questo come ad uno svantaggio pensiamo, al contrario, che possiamo lavorare in modo molto proficuo, creando uno strumento analogo noi stesse in prima.

Prima di intervistiamo i bambini e raccogliamo i loro pareri: Chi è il più alto qui dentro? Chi è il più basso? Il più alto, quanto è alto? Il più basso, quanto è alto? Chi è più alto, di solito, fra un bambino e una bambina? Chi è più alto fra un papà e una mamma?...

Registriamo su un cartellone tutte le risposte dei bambini.

Vogliamo spingere i bambini ad effettuare delle vere e proprie misurazioni.

Occorre procurarsi un "doppio metro" in cui siano chiaramente scritti anche i numeri oltre il 100. Le strisce delle altezze devono essere costruite dai bambini (due alla volta, la maestra fa da aiutante tecnico).

Un bambino si appoggia alla parete per essere misurato e l'altro pone il segno dell'altezza, legge il numero e lo scrive sul muro (copriamo il muro con un foglio di carta da pacchi). Se il bambino che sta scrivendo e leggendo i numeri trova difficoltà, facciamolo aiutare da chi, fra i bambini, non presenta difficoltà a leggere i numeri oltre il 100. Oppure: aiutiamoli leggendo la prima cifra, le altre le aggiungeranno da soli. Esempio: se c'è da leggere il numero 123, leggiamo la prima cifra (non dimentichiamo di indicarla mentre la leggiamo) "cento"; indichiamo le altre due ed aspettiamo che sia il bambino a leggerle. Chiediamo ora di metterle tutte insieme. Realizziamo le strisce delle altezze con cartoncino bristol.

Scriviamo i numeri delle altezze su cartellini, cerchiamo il posto sulla linea dei numeri che abbiamo già costruito ed attacchiamoli.

Confrontiamo le altezze. Il modo più immediato è quello di verificare se le ipotesi fatte inizialmente dai bambini sono vere. Riprendiamo le risposte che i bambini avevano dato alle domande precedenti e vediamo chi si era avvicinato di più.

[In questa fase del lavoro non serve il quaderno, ma se qualche insegnante ha la necessità di farlo usare perché i genitori vogliono vedere che cosa si fa a scuola, può chiedere ai bambini di fare un resoconto di quello che si sta facendo in classe, disegnando le varie fasi e chiedendo, come compito a casa, di colorare tutto.]

Ordiniamo le strisce dell'altezza in ordine crescente e decrescente (abbinate al numero), costruendo due cartelloni. Prendiamo in esame la striscia dell'altezza del bambino più alto e quella del bambino più basso. Quanto manca al bambino più basso per raggiungere l'altezza del bambino più alto?

Registriamo con attenzione le strategie che i bambini utilizzano per risolvere questo problema. Se non riescono a trovare una strategia adatta, aiutiamoli sia con la linea dei numeri, sia con l'operazione.

Il peso

Sulla carta d'identità che stiamo costruendo dobbiamo scrivere anche il peso. Sicuramente tutti i bambini sapranno che per poter scoprire il peso corporeo bisogna servirsi della bilancia. Prendiamo quella analogica in dotazione al plesso, oppure portiamone una da casa. Facciamo salire tutti i bambini, uno alla volta, sulla pedana e chiediamo a loro stessi di leggere il numero corrispondente al proprio peso, segnato dall'ago.

Nessuno avrà dubbi nell'affermare che, vicino al numero, è necessaria la parola "chili" per indicare il peso. Per registrare la situazione, consegniamo ad ogni bambino due cartoncini: uno sul quale scriveranno il proprio nome ed il proprio peso da posizionare sulla striscia dei pesi ed uno con scritto solo il numero corrispondente al peso da sistemare sulla linea dei numeri.

Sistemiamo alla parete, in verticale partendo dal pavimento, una striscia di carta bianca larga almeno 20 cm con i numeri graduati da zero al peso della maestra (i due pesi limite). Tutti avremo, a quel punto, il nostro cartoncino.

Chiediamo ad ogni bambino di attaccare il proprio vicino al numero uguale, sulla striscia di carta. Mentre procediamo nell'attività di abbinare i cartellini ai numeri ordinati, sollecitiamo i bambini con domande: Chi pesa di più? Chi pesa di meno? Quanto pesano due bambini [scegliamo due bambini a caso] insieme? Come possiamo rispondere a questa domanda? Registriamo tutti i suggerimenti dei bambini. Se la soluzione sarà quella di far salire i due bambini sulla bilancia insieme, facciamolo e registriamo il peso complessivo. Quanto pesano quattro bambini insieme? Sarà più difficoltoso far salire quattro bambini contemporaneamente sulla bilancia, ma se questa è nuovamente la soluzione proposta, la asseconderemo.

Quanto pesiamo tutti insieme? ...E ora come si fa? Tutti insieme sulla bilancia non ci stiamo, il che comporta strategie alternative: per esempio, la somma dei singoli pesi (il ricorso ad un vero e proprio modello matematico).

Controlliamo e registriamo sempre tutti i numeri che otteniamo e se siamo tanto fortunati da avere pesi come 23 kg e 32 kg non ce li facciamo scappare! Notiamo insieme ai bambini la diversa posizione delle cifre.

Inventiamo insieme ai bambini "frasi pazze", cioè false, tali da destare ilarità e discussioni: la maestra pesa 18 chili, una cavalletta pesa 34 chili, una piuma pesa 20 chili, ...

Prepariamo anche delle rudimentali palette con bastoncini da spiedino e cartone e scriviamo da una parte la "V" di vero, dall'altra "F" per falso. Ognuno di noi, a turno, proporrà frasi alle quali gli altri dovranno far corrispondere con la paletta il valore di verità.

L'osservazione della striscia dei pesi ci può portare anche a prime semplici osservazioni di ordine statistico (proponibili anche con le

altezze): la maggior parte dei bambini pesa..., i bambini più leggeri sono..., i bambini i più pesanti sono...

Ancora domande da fare a proposito del peso: Quanto pesa la mamma? Quanto pesa il papà? Quanto pesa il gattino? Quanto pesa il pulcino? Quanto pesa un maialino? Quanto pesa un vitellino? Quanto pesa un elefantino? ...

Il numero civico

Un ulteriore compito a casa. Anche questa volta usciamo un po' dai "numeri grandi", ma come compito da fare a casa, dove certamente interverranno i genitori, può andar bene. Chiediamo ad ogni bambino di disegnare la sua abitazione mettendo in risalto il numero civico. A scuola chiediamo ai bambini di leggere il numero della propria casa a tutti i compagni. Possono sorgere dubbi se qualche bambino mostra il proprio disegno in cui il numero è affiancato da una lettera, ad esempio 17 A. Facciamo seguire una spiegazione da parte nostra e registriamo le osservazioni dei bambini sull'utilità del numero civico.

La data di nascita

La carta d'identità che stiamo costruendo contiene anche informazioni sulla data di nascita dei bambini. Forse ricorderanno il giorno ed il mese in cui sono nati, ma non è detto che sappiano di quale anno. Riflettiamoci insieme analizzando ancora il nostro documento. Leggiamo ad alta voce la data di nascita di tutti i bambini: scopriremo che tutti sono nati nel 1996. Qualcuno può affermare che «È proprio perché siamo nati tutti assieme che veniamo a scuola in prima», sottolineando che gli altri più piccoli, cioè gli ex compagni, sono ancora alla scuola dell'infanzia.

Chiediamo se sono capaci di scrivere il numero 1996. Consegniamo ad ognuno un foglietto ed aspettiamo le loro risposte. Chiediamo ancora se, secondo loro, si tratta di un numero grande e perché. Possiamo ottenere risposte simili a quelle già avute alla richiesta di scrivere 1995 l'anno scorso, durante le prove preliminari:

0061 (N), 10009100 (Ab), 1915 (G), 109100 (GS), 7005 (GD), 9586 (Al), 10009 (S), 1630 (LB), 567 (Lu), 6495 (MV), 10198100 (Se), 1905 (F), 590101900 (L), 29...9..(BB).

I bambini della scuola

Insieme ai bambini abbiamo parlato di compagni di classe e di compagni di scuola. Non lasciamo cadere il discorso. Mettiamoci seduti in cerchio e iniziamo la nostra nuova conversazione: Quanti bambini siete in classe? Come possiamo saperlo con esattezza?

Ascoltiamo le risposte e le varie soluzioni proposte, poi procediamo.

Aumentiamo la difficoltà del problema, in modo tale che i bambini siano costretti ad operare con numeri grandi: Quanti bambini pensate che ci siano in tutta la scuola? Come si può fare a saperlo?

(Se la scuola fosse molto grande, riferiamoci solo alle classi prime o alla sezione).

Ascoltiamo le ipotesi dei bambini e le varie strategie per risolvere il problema. Scegliamo, tra quelle proposte, una condivisa da tutti e mettiamola in atto. Dopo aver raccolto i dati necessari, ogni bambino tenterà di rispondere singolarmente alla domanda: «Quanti sono in tutto gli alunni della scuola?».

Alla fine socializziamo i loro lavori e i loro risultati e non dimentichiamo di registrare tutto.

Illustrando ciascuno le loro metodologie, i bambini sicuramente useranno termini come “mettere insieme”, “continuare a contare” e altri simili, se non addirittura “addizione” e “più”, perché già incontrati alla scuola dell’infanzia o a casa. Questo è il momento opportuno per introdurre l’addizione.

Dato che i risultati non coincideranno, chiederemo loro come si può verificare la correttezza del risultato, con l’avvertenza che non sarà l’insegnante ad eseguire il calcolo al posto loro, ma che lo dovremo trovare attraverso la collaborazione di tutti.

Forse qualcuno proporrà il controllo con la calcolatrice, o perché già conosciuta o perché è in classe a disposizione degli alunni, con altro materiale; altrimenti saremo noi stessi a proporre l’uso. Dopo una prima familiarizzazione con lo strumento (osservazione, prova, ...), eseguiamo il calcolo e stabiliamo il numero effettivo degli alunni di tutta la scuola.

Chiediamo ai bambini di scrivere, nel modo che ritengono più opportuno, ciò che abbiamo fatto in classe. Possiamo aiutarli ad eseguire questo compito invitandoli ad usare rappresentazioni grafiche della situazione problematica e della soluzione.

L’uso della calcolatrice non deve però rimanere un evento sporadico; al contrario, essa deve essere riutilizzata più volte per nuove scoperte, per consolidare certe capacità e aiutare il bambino stesso nell’esecuzione di

alcuni calcoli. Si richiederà di portare una piccola calcolatrice, che oggi si può trovare anche gratuitamente (omaggi pubblicitari), e di tenerla sempre nello zaino come normale materiale scolastico.

Lasciamo giocare liberamente i bambini con la calcolatrice, ma proponiamo anche attività come le seguenti.

Utilizzando la calcolatrice trova il numero che occorre aggiungere a 15 per formare 30.

Assegniamo un punto al primo bambino che risponde esattamente e continuiamo a giocare proponendo altri numeri. Vince chi per primo raggiunge 5 punti. Chiediamo ai bambini di scrivere sul loro quaderno tutte le soluzioni trovate.

Aiutandoti con la calcolatrice, forma in tutti i modi che riesci a trovare, il numero 60 e registra nel quadernone come hai fatto.

Alla fine, socializzando le varie soluzioni trovate dai bambini, potremmo fare tutti insieme un cartellone su “Gli amici del 60”, dove verranno registrate tutte le n-ple di numeri (naturali) che hanno come somma 60.

Cerca, aiutandoti con la calcolatrice, dei numeri che, aggiunti a 25, formino 50. Registra le combinazioni nel quadernone.

Anche questa attività può diventare un gioco e vince chi trova più combinazioni. Il vincitore verrà proclamato dalla classe al momento della socializzazione, che ci servirà inoltre per condividere, validare, accettare le varie combinazioni.

I giorni dell'anno

Abbiamo parlato con i bambini dell'anno in cui sono nati; ma: quanti giorni ci sono in un anno? Disponiamoci per una conversazione e chiediamo: Quanti giorni ci sono in un anno: 10 – 365 – 1000?

Ascoltiamo tutte le risposte e chiediamo ancora: Come possiamo sapere se il numero scelto è il numero giusto? Ogni bambino dirà la sua e fra le varie proposte forse ci sarà quella di contare i giorni del calendario. Iniziamo a contare insieme i giorni. Così diverrà presto troppo noioso! E se ci sbagliamo dobbiamo ricominciare da capo? Ci può essere un sistema più rapido per controllare quanti sono i giorni di un anno? Con il calendario in mano, portiamo i bambini a vedere la possibilità di addizionare i giorni dei vari mesi. Registriamo ciò che ogni bambino suggerisce e in quale modo riescono a pensare all'operazione che noi abbiamo in mente ma che non riveliamo loro. Ecco dunque un altro uso interessante della calcolatrice; è il momento di esaminare come

funziona. Aiutiamo i bambini ad impostare insieme questa lunghissima operazione; alla fine sapremo con certezza quanti sono i giorni dell'anno.

Dopo aver fatto la verifica, sappiamo che i giorni di un anno sono 365 (quasi sempre). A questo punto chiederemo ai bambini di scrivere 365 su di una scheda già preparata.

Scheda n° 1

I GIORNI DELL'ANNO SONO...

Quando tutti avranno finito, scriviamo alla lavagna il modo in cui ogni bambino ha scritto il numero e dopo ne discutiamo insieme. Le scritture che potrebbero uscire sono: 365 30065 300605

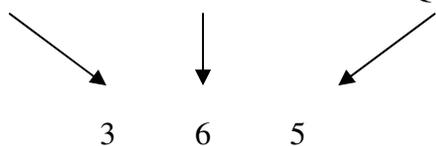
Non commettiamo l'errore di affermare che i primi due sono sbagliati, anche se formalmente lo sono, ma utilizziamo queste forme di scrittura per un'analisi collettiva sul valore posizionale delle cifre, che alcuni bambini dimostrano di possedere.

Trascriviamo alla lavagna il numero in lettere ed evidenziamo le parti della parola che corrispondono alle cifre che compongono il numero:

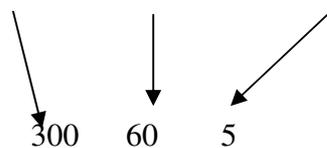
TRECENTO/SESSANTA/CINQUE

A questo punto possiamo collegare ogni parte della parola alla cifra che la rappresenta.

TRECENTO/SESSANTA/CINQUE



TRECENTO/SESSANTA/CINQUE



TRECENTO/SESSANTACINQUE



Per concludere, facciamo notare prima e affermiamo poi, che 365 è la forma più corretta e più veloce, ma che le altre non sono sbagliate, perché rappresentano la scomposizione del numero stesso.

Rafforziamo l'intuizione del valore posizionale delle cifre che i bambini hanno avuto e insieme scomponiamo il numero, cercando di scoprire il valore di ogni cifra.

365 è formato da: 3 – 6 – 5.

Quanto vale il 3? Quanto vale il 6? Quanto vale il 5?

Le risposte, grazie al lavoro precedente, scaturiranno per la maggior parte spontaneamente.

Classificazione dei numeri in base alle cifre

Riprendiamo in mano le carte d'identità. Ci sono ancora tanti numeri che non abbiamo analizzato. Questa volta prendiamoli tutti insieme, tutti i numeri di tutte le carte d'identità, e trascriviamoli su un cartellone, utilizzando qualsiasi tipo di tecnica (ricopiare i numeri su carta da pacchi, dipingerli con gli acquerelli e ritagliarli con le forbici o con il punteruolo...). Cerchiamo insieme ai bambini un nuovo criterio per classificarli. Estraniamoli dal loro uso e dividiamoli in almeno 6 grandi gruppi:

numeri con 1 cifra

numeri con 2 cifre

numeri con 3 cifre

numeri con 4 cifre

numeri con 5 cifre

numeri con 6 cifre (per esempio, alcuni numeri del telefono)

Prepariamo 6 grandi scatole, meglio se trasparenti, e chiediamo ai bambini di trascrivere nuovamente i numeri, anche questa volta come vogliono loro. Ritagliamoli di nuovo (ad esempio 356 tagliato tutto insieme non a cifre). Avremo un grande mucchio di numeri. Chiediamo ai bambini di metterli nelle scatole che abbiamo preparato, quelli con 1 cifra in una scatola, con 2 cifre in un'altra scatola ecc.

Riprendiamo questa attività dopo qualche giorno. Chiediamo ad un bambino di prendere la scatola che contiene i numeri di 3 cifre; il bambino deve controllare tutte le scatole per trovare quella giusta. Come possiamo fare per non perdere tempo?

Avviamo una discussione che coinvolga l'intera classe, per giungere alla decisione condivisa di mettere sulle scatole i cartellini che indichino che tipo di numeri contiene ogni scatola (ci scriviamo davanti un numero).

Facciamo ora piccoli giochi con i bambini.

Mettiamo un numero di 3 cifre nella scatola da 2, poi affermiamo con sicurezza che quel numero ha 2 cifre. I bambini amano queste cose e al tempo stesso noi possiamo verificare se i bambini riconoscono l' "intruso".

Qual è il più grande fra due numeri che hanno le stesse cifre?

Riflettiamo con i bambini sul come possiamo fare a stabilire che un numero è maggiore di un altro quando hanno lo stesso numero di cifre.

Prendiamo la scatola dei numeri a due cifre dove avremo avuto l'accortezza di mettere numeri come i seguenti: 53; 35; 48; 84; ecc.

Analizziamo i nostri numeri ponendo alcune domande ai bambini (registriamo tutte le risposte): Qual è il numero più grande fra 53 e 35? Perché lo consideri più grande?

Facciamo la stessa cosa utilizzando la scatola dei numeri a tre cifre ed analizziamo tre numeri alla volta, avendo sempre l'accortezza di preparare nella scatola numeri come 124, 421, 214...

Chiediamo ai bambini: Qual è il numero più grande fra 124; 421; 214? Perché pensi che sia il più grande?

Registriamo tutte le osservazioni.

Prepariamo alcune schede di lavoro e consegniamole ai bambini dopo aver svolto le attività con le scatole dei numeri a due e a tre cifre.

Scheda n° 1

Scegli il numero più grande: 13 – 97 – 79

Scheda n° 2

Scegli il numero più piccolo: 13 – 97 – 79

Scheda n° 3

Scegli il numero più grande: 189 – 345 – 921

Scheda n° 4

Scegli il numero più piccolo: 189 – 345 – 921

Numeri e cartellini

Consegniamo ai bambini tre cartellini con su scritti i numeri 8 – 2 – 1. Chiediamo di costruire il numero più grande che possono con ciò che hanno a disposizione. Confrontiamo i lavori eseguiti da tutti i bambini della classe, poi chiediamo di costruire il numero più piccolo che

possono usando tutti i numeri scritti sui cartellini che abbiamo consegnato loro.

Continuiamo consegnando altri cartellini fino a quando ci sarà interesse da parte dei bambini per questa attività.

Ancora il 365

Torniamo ad occuparci del nostro 365. Facciamo notare ai bambini che in questo caso il 3 è la cifra che vale di più perché si trova a sinistra e invece il 5 è quella che vale di meno perché a destra. Facciamo la stessa cosa con altri numeri.

Valore dei gettoni

Mettiamo a disposizione dei bambini vari gettoni su cui sia chiaramente scritto “1”, “10” e “100” (se siamo fortunati li troviamo in commercio, altrimenti dovremo farceli da soli). Chiediamo ai bambini di formare il 300.

In un primo momento lasciamoli liberi di formarlo come vogliono, poi mettiamo la clausola di comporlo con il minor numero di gettoni.

Chiediamo la stessa cosa per il 60 e per il 5.

I bambini potranno sul banco i gettoni disposti più o meno nella maniera seguente:

$$\begin{array}{r} 365 = 300 + 60 + 5 \\ \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \textcircled{100} \textcircled{10} \textcircled{1} \\ \textcircled{100} \textcircled{10} \textcircled{1} \\ \textcircled{100} \textcircled{10} \textcircled{1} \\ \quad \textcircled{10} \textcircled{1} \\ \quad \textcircled{10} \textcircled{1} \\ \quad \textcircled{10} \end{array}$$

Non formalizziamo in questo modo sul quadernone o su cartelloni; il lavoro in questa fase deve essere esclusivamente pratico.

Dopo aver lavorato più volte con simili scomposizioni, riflettiamo insieme ai bambini su quale può essere un modo rapido per scrivere ciò che stiamo facendo. Chiediamo ogni volta di raccontare la procedura che stanno mettendo in atto. Richiamiamo la loro attenzione su:

quanti gettoni con valore 100 usi per avere 300?

quanti gettoni con valore 100 usi per avere 200?

quanti gettoni con valore 100 usi per avere 400?

quanti gettoni con valore 100 usi per avere 600?

quanti gettoni con valore 100 usi per avere 100?

...

Accordiamoci con loro su i seguenti modi di scrivere:

$300 \rightarrow 3 \text{ (100)}$

oppure

$300 \rightarrow 100 \text{ per } 3 \text{ volte}$

Procediamo allo stesso modo per il 60, fino a giungere all'accordo sui seguenti modi di scrivere:

$60 \rightarrow 6 \text{ (10)}$

oppure

$60 \rightarrow 10 \text{ per } 6 \text{ volte}$

Ancora per il 5

$5 \rightarrow 5 \text{ (1)}$

oppure

$5 \rightarrow 1 \text{ per } 5 \text{ volte}$

È bene ripetere questo esercizio con altri numeri, anche quelli usati precedentemente.

Informiamo i bambini che nel nostro sistema di numerazione il gettone da 1 corrisponde ad 1 unità (simbolo u), che il gettone che vale 10 corrisponde ad 1 decina (simbolo da) e quello da 100 ad 1 centinaio (simbolo h).

Avendo scoperto il valore di ogni cifra, possiamo scrivere così:

$$365 = 300 + 60 + 5$$

Rafforziamo questa nuova conoscenza attraverso altre scomposizioni di numeri grandi, ma solo quelli che davvero scaturiranno di volta in volta dalla quotidianità. Possiamo utilizzare anche altri numeri grandi detti dai bambini.

Gioco I: la Tombola

Per rafforzare il concetto di valore delle cifre possiamo sfruttare il gioco della “Tombola”. Passaggio molto importante prima di giocare, è l’osservazione delle cartelle e di come sono disposti i numeri. Ad ogni bambino diamo una cartella; chiediamo loro di osservare come sono disposti i numeri e discutiamone insieme. I bambini noteranno che in ogni colonna ci sono i numeri di una certa decina.

Ad esempio:

	13		35		58		72	88
8	17			49		63	75	
		22	31	42		66		81

Quindi:

I colonna → numeri da 1 a 9

II colonna → numeri da 10 a 19 (numeri con 1da)

III colonna → numeri da 20 a 29 (numeri con 2da)

E così via. Sicuramente le osservazioni che faranno i bambini saranno più numerose. Dopodiché giochiamo e facciamo in modo che queste informazioni facilitino la ricerca del numero estratto nella loro cartella. A noi questo servirà perché il bambino ogni volta, mentalmente, dovrà scomporre il numero estratto in decine e unità.

Gioco II: l’investigatore

Prima di iniziare il gioco, enfatizziamolo chiedendo ai bambini di trasformarsi in investigatori. Leggiamo inizialmente la storia.

I storia: “Il furto”

A Parigi è avvenuto un furto di una famosa pergamena al museo del Louvre. La polizia parigina chiama l’ispettore Zenigata, perché il ladro Lupin ha lasciato un messaggio. Il messaggio è un indovinello che aiuterà l’ispettore a ritrovare la refurtiva, nascosta in una cassetta di sicurezza dell’aeroporto di Parigi. L’ispettore Zenigata non può far

controllare tutte le cassette di sicurezza dell'aeroporto, perché sono milioni e milioni, così preferisce risolvere l'indovinello lasciatogli da Lupin.

Consegniamo ai bambini la scheda con l'indovinello e leggiamo insieme a loro.

“Indovinello di Lupin”

IL NUMERO CHE DEVI CERCARE
TRA QUESTI LO DEVI TROVARE

651 15 365 671 481 8 100 99 681

IL NUMERO INDICATO
DA TRE CIFRE È FORMATO

.....

SE TU LO VORRAI SCOPRIRE
SAPPI CHE CON 1 DOVRÀ FINIRE

.....

PER VOLERLO INDIVIDUARE
LE CENTINAIA DOVRAI GUARDARE
E IL 6 DOVRAI CERCARE

.....

FAI IL SEGUGIO COME IL BASSOTTO
E CERCA IL NUMERO CHE DI DECINE NE HA 8

.....

Il storia: “Paperon de’ Paperoni smemorato”

[Si tratta di un indovinello analogo, un po’ più complesso].

Possiamo inventare altre storie simili, da far eseguire successivamente anche a gruppi o individualmente.

Costruiamo il mercatino

Predisporre un mercatino in classe sembra essere diventato ormai un “classico”. Noi lo utilizzeremo, non solo per fare cambi, ma anche con lo scopo di far eseguire ai nostri alunni addizioni con i numeri grandi.

Facciamo costruire ai nostri alunni monete e banconote da 1 €; 10 €; e 100 € e prepariamo oggetti che ci diano modo di lavorare con i numeri grandi. Facciamo assumere a turno ai bambini i diversi ruoli di acquirente, venditore, cassiere... Prima di iniziare a giocare, accompagniamo i bambini al supermercato, dal fruttivendolo, in un negozio di abbigliamento... e chiediamo ai genitori di fare la stessa cosa. Durante le visite ai negozi, chiediamo ai bambini di annotare quello che succede: ciò che fanno i vari attori di questa situazione e, una volta rientrati in classe, registriamolo su cartelloni.

Per far emergere la necessità di andare a comperare qualcosa che serve davvero, d'accordo con i genitori, una mattina "speciale" (avremo preparato tutti i permessi del caso), facciamo sparire le merende dagli zaini. Possiamo inventare qualsiasi cosa: un mago malandrino..., una strega furbetta... Come facciamo? Dove andiamo a comperare le merende? Chi paga? Quanto costa una merenda? E tutte le merende? Come facciamo a calcolarlo? Il negoziante prende tutti i soldi che gli diamo? ...

Registriamo tutti gli interventi e tutti i suggerimenti. Con le fasi di questa esperienza realizziamo nuovamente un cartellone riassuntivo.

Tornati in classe, facciamo vivere ai bambini situazioni simili a quelle vissute nei negozi. Nell'organizzazione del mercatino non dobbiamo trascurare la fase relativa allo stabilire i prezzi per gli oggetti da vendere. Anche questa volta chiediamo aiuto ai genitori che, nel farsi accompagnare dai loro figli nei vari negozi, devono aiutarli ad annotare i prezzi dei singoli oggetti. Da dove vengono i soldi? Anche per questo sarà efficace l'aiuto dei genitori.

Iniziamo a giocare. Ogni bambino assume un ruolo (a rotazione). Invitiamo ogni alunno a registrare sul proprio quadernone le operazioni che compie in maniera libera. Se il suo ruolo è quello di cassiere della banca registrerà i cambi...; se il suo ruolo è quello di negoziante registrerà i soldi che ha incassato disegnando le monete e le banconote o attaccando le fotocopie che avremo preparato insieme. Possiamo invitare i bambini ad attaccare sul proprio quadernone solo la moneta unita, e a scrivere poi quante volte deve essere considerata. Se, ad esempio devono riportare 300 €, attaccheranno la fotocopia di una banconota da 100 € scrivendo accanto a questa "per 3", come abbiamo fatto in precedenza con i numeri.

Facciamo sempre raccontare ai bambini la procedura che adottano e registriamola. Lasciamoli liberi per un po' di tempo (un mese circa) di lavorare come vogliono e se devono calcolare lasciamoli liberi di usare la calcolatrice.

Proponiamo un modo di addizionare che può sembrare macchinoso, ma che funziona. Inizialmente useremo i soldi, poi svincoliamoci da questi ed utilizziamo solo i numeri.

Riprendiamo il modo di scomporre i numeri che abbiamo già utilizzato.

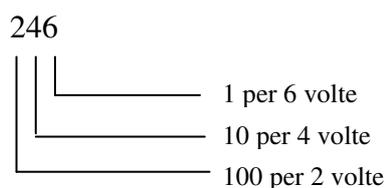
Ad esempio, scomporre 246 in:

200 → 100 per 2 volte

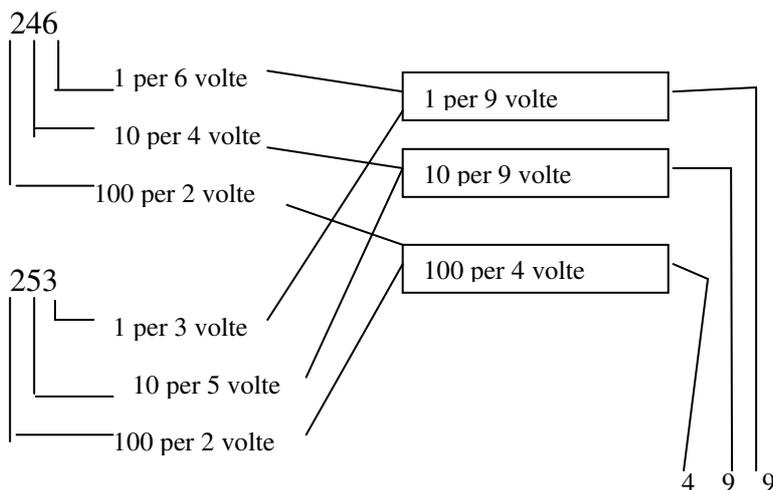
40 → 10 per 4 volte

6 → 1 per 6 volte

e chiediamo ai bambini di scriverlo così:



Ora facciamo eseguire l'addizione: $246 + 253 =$ scomponendo entrambi i numeri nella maniera indicata:



La stessa cosa può essere possibile con la sottrazione.

[Nel testo, segue una strategia per il calcolo della sottrazione, del tutto analoga].

7. I risultati della sperimentazione e della ricerca, dal punto di vista della costruzione del sapere da parte dei bambini, con commenti

La sperimentazione è stata spesso considerata “molto” o anche “troppo” innovativa da alcuni degli insegnanti che avevano aderito all’attività; per questo, come abbiamo già accennato, alcuni insegnanti si sono allontanati dalla sperimentazione, per esempio inserendo prove tratte da manuali più diffusi e considerati più adeguati all’età degli allievi.

È ovvio che queste variazioni rispetto a degli pseudo programmi stabiliti dalla consuetudine rendono vana la sperimentazione soprattutto perché il confronto non può più essere fatto con criteri oggettivi. Pur lasciando traccia dei nomi degli insegnanti come Autori di questo testo, dato che, in qualche modo, vi hanno contribuito, abbiamo ritenuto che non fosse lecito utilizzare risultati non garantiti.

Ecco perché ci baseremo solo sulle sperimentazioni effettuate su 152 bambini e sulle prove finali effettuate su 139 bambini, ritenendole perfettamente attendibili.

I numeri che seguono, però, sono variabili e sempre nettamente inferiori a questi, dato che vi hanno profondamente inciso sia assenze per malattie, sia la decisione di eseguire le prove in tempi diversi da quelli stabiliti; anche su questa variabile, abbiamo deciso di essere il più rigorosi possibile.

Cominceremo con il fornire i risultati delle prove finali, per dare il senso degli stessi; e non ci esimeremo dal fare commenti “a caldo”, piuttosto che rinviarli ad un prossimo paragrafo.

Il valore posizionale delle cifre

Si sono eseguite prove del tipo “investigatore” o “Paperone”, esaminando una media di 99 bambini. La percentuale dei bambini che risultano perfettamente consapevoli, anche grazie ad interviste, del valore posizionale delle cifre in numeri a tre cifre, è risultata in media dell’88%.

Sembra dunque che 6 anni sia un’età adatta per il raggiungimento di questa consapevole costruzione di conoscenza anche sui ‘grandi numeri’.

Scomposizione dei numeri secondo il sistema polinomiale con gettoni

Si sono eseguite prove su numeri di tre cifre, anche con commenti ed interviste, con il risultato che la scomposizione polinomiale (es. $365 = 3$ volte $100 + 6$ volte $10 + 5$ volte 1) è considerabile consapevole costruzione di conoscenza dal 98,86% dei bambini esaminati.

Ordinare i numeri naturali, dal più grande al più piccolo e viceversa

Si sono eseguite prove con numeri di una, due e tre cifre, inserendo anche numeri - trabocchetto. Possiamo affermare che si può considerare consapevole costruzione di conoscenza nell'83,47% dei casi. Però il 6,61% non commette veri e propri errori, ma semplicemente dimostra incertezza proprio nei casi dubbi. Facendo la somma dei casi positivi, si giunge al 90,08%. Inoltre, vi sono errori di mancata interpretazione della consegna; bambini, cioè, che ordinano in modo inverso a quello chiesto: 4,13%. Se si ammettono come non negative queste prove, si giunge al 94,21% di bambini che dimostrano di aver capito il senso e le tecniche dell'ordinamento anche con numeri grandi.

Eseguire addizioni tra numeri grandi e con molti addendi

Questa è la prova che ha creato il maggior imbarazzo tra le insegnanti sperimentatrici; alcune non hanno avuto il coraggio di fidarsi dei bambini, del loro forte entusiasmo (la coppia "motivazione – volizione" qui ha funzionato davvero). Il risultato è comunque sorprendente: il 95,35% dei bambini cui è stata affidata la prova, hanno eseguito tutto correttamente, usando la macchina calcolatrice con molta serenità.

Lettura e scrittura dei numeri anche di tre cifre, in cifre e parole

Qui si è avuto il risultato più deludente, dato che *solo* l'86,37% dei bambini esegue perfettamente la prova. Molti bambini del 13,63% che sbaglia, però, dimostra solo una qualche incertezza (oltre il 10%) di tipo linguistico o resta ancorato alla scrittura evidenziata nel paragrafo 6. (del tipo: "trecentosessantacinque" scritto come "300605"). Se si ammettono queste 'incertezze' comunque come una prova positiva, allora la percentuale di risposte corrette sale addirittura al 96,97%.

Ci pare di poter confermare l'alta positività della sperimentazione; il bambino accetta di poter portare a scuola la sua dote di conoscenze

pregresse, per quanto concerne l'aritmetica; e poiché i 'numeri grandi' fanno già parte del suo bagaglio di esperienza, gli sembra del tutto naturale che si cominci da lì. La supposta e temuta incapacità dei bambini di gestire questa aritmetica 'complessa', semplicemente, non esiste, se l'insegnante decide davvero di seguire con rigore e metodologia opportuna questa strada.

Alcuni degli insegnanti che lungo il corso della sperimentazione ha preferito 'ritornare' su binari più sicuri, hanno però chiesto di restare nel gruppo, come spettatori senza coinvolgimento diretto, per poter conoscere l'epilogo e gli sviluppi della vicenda. Proprio loro hanno insistito per porre qui l'accento sul fatto che il loro 'fallimento' è stato dettato dal loro stesso timore adulto e non certo da dimostrazioni di incapacità manifestate dai bambini. Esprimono il rammarico di aver perso questa occasione e si ripromettono di seguire questa falsariga in occasione della prossima volta in cui avranno una prima.

8. Il punto di vista di insegnanti e genitori

Quel che caratterizza il lavoro degli insegnanti sperimentatori è certo una forte commistione tra timore ed entusiasmo. A rinforzare il secondo sentimento, certo ha contribuito molto l'idea vincente di far precedere alla sperimentazione un anno di prove e verifiche. Man mano che gli insegnanti, seguendo l'iter preparato, trovavano le conferme alle prove eseguite l'anno prima, si caricavano di entusiasmo. Le defezioni si sono avute di fronte ad errori inattesi dei bambini cui le insegnanti non erano pronte a far fronte. Come vedremo, sono stati spesso i genitori a motivare ed entusiasmare le insegnanti, anche nei momenti di incertezza. Torniamo alle risposte errate dei bambini, non previste dall'anno di prove.

Per prima cosa, affermiamo che non è possibile prevedere tutte le possibili reazioni dei bambini; ma, in ogni caso, una forte competenza in didattica della matematica ci fornisce una ferramenta in grado di permetterci duttilità interpretativa.

Discutiamo un episodio.

Alla domanda: «Scrivi il numero più grande del mondo», un bambino (metà di settembre) scrive: «1320» (e lo legge correttamente). La maestra insiste: «Sei sicuro che sia il più grande?»; ed il bambino,

subito: «No, ce ne sono di più grandi». «Per esempio?». Il bambino scrive: «1369» (e lo legge correttamente).

Che ci sia consapevolezza “locale” e non “globale” dell’illimitatezza dei numeri naturali, può anche essere un fatto dato per scontato, uno scotto da pagare all’età. Ma non si tratta di ignoranza, bensì di un misconcetto che sta per essere superato.

Su questo episodio abbiamo molto riflettuto; esso è l’espressione tipica di una conoscenza in via di costruzione, non una banale espressione di ignoranza. Esso è stato assunto in modo emblematico. La coppia di risposte: 1320, 1369 dimostra che il bambino è avviato in modo positivo verso una corretta costruzione, ma la funzione del docente è proprio quella di dirigere, indirizzare, non di sostituire, imporre.

In una sperimentazione che sfrutta competenze tutte in costruzione, la funzione dell’insegnante è particolarmente significativa, più vista come ‘orientatrice’ che non come ‘impositrice’ (Scali, 1994).

Quelle insegnanti che hanno preferito o abbandonare del tutto la sperimentazione (solo 2) o limitarsi a fare da spettatrici, hanno proprio denunciato questa loro impreparazione metodologica (tipica della cosiddetta ricerca – azione) (D’Amore, 1991). Finché si tratta di condurre il bambino lungo una strada prestabilita e nota, con funzioni sociali ben chiare, allora tutto scorre bene: ciascuno degli attori in gioco sa qual è il suo ruolo; soprattutto, il “sapere da apprendere” si può far coincidere (in modo illusorio, ovviamente) con il “sapere insegnato” (Fandiño Pinilla, 2002). Ma se vi è continua situazione a-didattica (già di per sé più difficile da gestire da parte dell’insegnante) in cui, oltre tutto, il traguardo cognitivo viene reimpostato passo dopo passo, a seconda della situazione, allora l’insegnante perde la sicurezza; neppure il successo cognitivo dell’allievo le può dare coraggio, dato che non ha neppure gli strumenti per una sua valutazione (che, in effetti, dovrebbe essere rivista in senso profondo; Fandiño Pinilla, 2002).

Questa esperienza di sperimentazione e ricerca ha giocato un ruolo importantissimo presso le insegnanti sperimentatrici coinvolte, su due fronti metodologici.

1. Ha costretto a riflettere in maniera critica sulla effettiva e profonda differenza tra situazione didattica ed a-didattica, da un punto di vista molto concreto ed operativo, vivendo le fasi della relativa teoria, tanto

ben strutturate da Brousseau fin dagli anni '70, ma ancora non del tutto entrate nella consapevolezza degli insegnanti.

2. Ha fatto prendere confidenza con la tecnica didattica del lavoro tra pari; di grande aiuto è stato il fatto che, proprio nello stesso periodo, alcuni degli autori della presente sperimentazione - ricerca, stavano affrontando una ricerca (in corso di pubblicazione), nella quale si sfruttava molto la tutoria tra pari (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, 2004). Nei casi di incertezza da parte di qualche bambino, la tutoria effettuata su di lui da parte di un coetaneo più capace ha rivelato tutte le sue incredibili e positive qualità positive. Indipendentemente dalla nostra sperimentazione, riteniamo di poter dire che questa metodologia didattica (che altro non è) sia diventata patrimonio comune di tutti gli insegnanti coinvolti.

Sono state molto efficaci le considerazioni fatte dalle insegnanti coinvolte nella sperimentazione, sia orali (durante le riunioni di studio e discussione), sia scritte (per quanto non richieste esplicitamente). Una delle insegnanti che ha scritto un commento, ha coinvolto le colleghe della sua scuola, almeno come spettatrici, in questa attività di sperimentazione e così descrive, ad inizio novembre, il suo stato d'animo:

«RIFLESSIONI nate in programmazione, con le colleghe [si riferisce alle colleghe della sua scuola, quelle che, grazie alla sua abilità, sono state coinvolte positivamente nelle attività di sperimentazione].

Con questo tipo di approccio, i bambini “succhiano” continue informazioni sui numeri, fanno paragoni con i numeri che trovano a casa, portano a scuola numeri ritagliati da ogni parte (perfino dai pannoloni dei fratellini!!!) coinvolgendo i genitori in attività non previste o perlomeno assai diverse dai soliti compiti e/o esercitazioni di approfondimento.

Una mamma mi ha riportato il suo stupore nello scoprire che il suo bambino sa leggere numeri ben oltre il 20 e il 30 in così poco tempo. Un altro papà mi ha fatto notare, molto garbatamente, che sono pochi i compiti di aritmetica sul quaderno... Ho cercato di tranquillizzarlo sottolineando che il suo bambino ha fatto passi da gigante in questi due mesi iniziali, quindi deve essere stato molto coinvolto dal lavoro svolto in classe, anche se i genitori non possono avervi partecipato direttamente.

Credo sia fondamentale il rapporto aperto con i genitori, soprattutto con quelli che hanno bisogno di conferme; credo che di conferme abbiamo bisogno anche noi insegnanti!

È determinante il supporto delle colleghe e la loro “complicità” nel dialogo con i genitori.

Il “tarlo” più pericoloso, secondo me, è quello della PAURA che può insinuarsi in noi insegnanti:

- paura di lasciare una via collaudata da anni: l'ignoto è sempre un'incognita!
- paura di mettersi in gioco insieme ai bambini e perdere così una certa “prevalenza” dovuta all'essere l'insegnante: colui che insegna dovrebbe essere anche colui che dirige il gioco?
- paura di essere giudicati per ciò che appare sulle pagine dei quaderni;
- paura che se i bambini non scrivono, registrano, documentano... non possano fissarsi in loro gli apprendimenti;
- paura di affrontare lo svolgimento delle programmazioni lavorando per “nodi problematici”: è molto più facile, per noi insegnanti, passare da una unità di lavoro ad un'altra in modo lineare, ma assai meno motivante e stimolante per i bambini!

Con queste nuove esperienze mi sto aprendo al nuovo e porto con me le mie colleghe, insieme cerchiamo di perdere le nostre paure: sono convinta che il coraggio degli insegnanti faccia venire anche ai bambini la voglia prendersi in carico l'attivazione dell'apprendimento.

Ci divertiamo molto, tanto che anche a casa i bambini vogliono far giocare i loro genitori, così diventa il compito per il giorno dopo».

[Sul rapporto con i genitori, torneremo anche successivamente].

Torniamo all'ansia manifestata dalle insegnanti quando, finita l'euforia della prova preliminare, hanno dovuto abbandonare una strada supercollaudata per affrontarne una nuova. Ecco alcune delle situazioni che sono state considerate come la causa dell'abbandono. Si tratta però di abbandoni rientrati; le insegnanti hanno portato la discussione della loro situazione in gruppo e, dopo consultazione, hanno deciso di proseguire.

1. Il luna park.

Un'insegnante ha interrotto le proposte di attività precedentemente

concordate in gruppo perché sono stati inseriti nella classe alcuni bambini i cui genitori lavorano in un luna park. L'insegnante dichiara esplicitamente: «Nel mese di ottobre ho sospeso queste attività per il sopraggiungere in classe di 5 nuovi alunni provenienti da famiglie che gestivano un luna park nelle vicinanze della scuola. Tuttavia abbiamo continuato a parlare di numeri anche se in altri modi».

Le due domande che il resto del gruppo ha posto in discussione sono state:

- *perché* il sopraggiungere di bambini i cui genitori lavorano in un luna park dovrebbe far interrompere le attività concordate?
- quali sono gli *altri modi* adottati per parlare di numeri a questi bambini e ai gruppi classe nei quali sono stati inseriti?

La discussione ha posto in evidenza che il problema 'aritmetico' stava soprattutto nell'insicurezza dell'insegnante nel gestire una classe diversa da quella cui era abituata, non nei bambini. [Un simile caso di interruzione delle attività concordate in gruppo si è verificato in un'altra classe prima con bambini, figli di contadini, che, secondo l'insegnante non possedevano competenze numeriche. Su questo caso dovremo tornare, perché proprio i genitori di questi bambini hanno aiutato l'insegnante a ritornare sui propri passi e a riprendere l'iniziativa].

2. I bambini in difficoltà.

Un'insegnante ha interrotto le proposte di attività precedentemente concordate perché si è accorta, durante le prove preliminari, che vi erano quattro bambini definiti 'in difficoltà' perché al loro ingresso a scuola non conoscevano i numeri entro il 20, nemmeno come filastrocca. Questi bambini, inoltre, rivelavano incompetenze anche in lingua italiana.

Durante la discussione, l'insegnante dichiara di procedere con loro facendo 'attività di recupero' gestite in questo modo: per due ore alla settimana non lavora con l'intero gruppo classe, ma solo con i quattro bambini in difficoltà. A questi bambini propone attività con "numeri in colore", "abaci", "BAM", "scalette", tutti cosiddetti "materiali strutturati", materiali che danno grande sicurezza agli insegnanti, nonostante le critiche cui sono stati recentemente sottoposti (D'Amore, 2002). L'insegnante sostiene che non le è sembrato corretto nei confronti di questi bambini, procedere nella maniera concordata, perché «avrebbe ampliato i vuoti già posseduti dai bambini». Confessa però che le attività di recupero non sembrano avere successo.

Le domande che ci siamo posti nella discussione di gruppo sono state:

- l'insegnante sembra convinta che le proposte concordate possono essere valide solo per i bambini già 'competenti'?; dunque, qualcuno ritiene che non si tratti di un curriculum sperimentale per tutti, ma di élite?
- i 'vuoti' che i bambini possono portarsi dietro e che possono dipendere da tante cose si colmano davvero con i "numeri in colore" e altri "materiali strutturati"? Chi ci assicura scientificamente che questi materiali non creino ulteriori danni cognitivi? L'illusione di vedere i bambini manipolare tali oggetti, non sarà uno schermo per nascondere poi veri vuoti cognitivi?
- essere incompetenti in lingua italiana fa diventare davvero automaticamente incompetenti in aritmetica, o semplicemente l'insegnante non riesce a distinguere e valutare due diverse competenze, confondendole?

Tali discussioni (di cui queste due sono solo esempi) non solo costringevano i singoli a riflettere, ma erano uno stimolo fortissimo per tutti per compiere analisi critiche di grande efficacia.

È stato necessario per le insegnanti uscire da queste 'ansie' ed essere consapevoli del fatto che si stava giocando sulle competenze reali dei bambini, non su 'conoscenze matematiche' sulle quali l'insegnante voleva che il bambino dimostrasse competenza.

In molti casi, l'intervento e l'appoggio dei genitori è stato vincente.

Mentre le insegnanti temevano molto che i genitori si ribellassero ad un'aritmetica che non seguiva canoni oramai entrati nella tradizione, viceversa, i genitori si sono nella stragrande maggioranza accorti da un lato dell'entusiasmo che i bambini portavano a casa, e poi della competenza che emergeva, tangibile, spendibile fuori dall'aula.

A volte, anche in situazioni di difficoltà...

Torniamo, per esempio, a quella insegnante nella cui classe erano iscritti figli di contadini. L'insegnante, onestamente, ammette di essere ritornata subito ai metodi 'tradizionali' non appena si è trovata di fronte alle presunte "difficoltà". Quando abbiamo avuto modo di discutere con lei se per caso non avesse provato a verificare quali erano le reali competenze aritmetiche di quei bambini, se per caso fossero più legate

alla realtà, ad altre forme di esperienza, la maestra si è ripromessa di farlo. Ma nel frattempo aveva già mandato a chiamare uno dei genitori giostrai, quello del bambino che sembrava mostrare più carenze. Gli ha esposto questo problema e si è trovata di fronte una persona molto responsabile e positiva: «È strano! – ha replicato il papà – Quando io aggiusto il trattore e lui vuole aiutarmi, se gli chiedo di portarmi la chiave numero 13 non si sbaglia mica!».

La maestra si è dovuta ricredere su tutte le sue ansie ed è ora una delle sostenitrici più consapevoli di questa sperimentazione.

Il precedente episodio, tra l'altro, ci ha messo di fronte all'importante problema della necessità di una "matematica del quotidiano" in aula (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001).

Alcune insegnanti del gruppo hanno manifestato l'esigenza di far lavorare i bambini con problemi... scolastici preconfezionati tipici, per provare sicurezza.

Pensando a questo, propongono i "classici":

«La mamma spende 3 euro per le mele e 5 euro per le pere. Quanto spende in tutto?»

Oppure:

«Devo comprare una matita che costa 5 euro e un temperino che costa 3 euro. Quanto spendo?».

Non è chiaro perché falsi problemi scolastici di questo tipo dovrebbero costituire oggetto tale da calmare la ansie, se non interpretando tali ansie come un fatto specifico del docente, non certo del bambino. Tutta l'esperienza di Boero et al. (1985) dimostra ampiamente la capacità del bambino di gestire situazioni problematiche complesse! Si veda anche D'Amore (1993) e D'Amore, Marazzani (2003).

Nell'ambito dei lavori del gruppo, ovviamente, in linea con le proposte curricolari, erano stati proposti ai bambini problemi che erano stati considerati più adeguati del tipo:

«Enrico è stato bravissimo a scuola e il suo papà gli ha finalmente promesso che gli regalerà una bicicletta nuova. C'è una regola, però, che Enrico dovrà sempre rispettare: non dovrà mai andare in bicicletta senza casco! Il papà compera, quindi, sia la bicicletta, sia il casco e spende 248 € per la bicicletta e 37 € per il casco. Quanto in tutto?»

«Luca ha un grandissimo problema! Il suo computer si è rotto! Il papà lo rassicura dicendogli che potrà averne un altro e insieme vanno a vederne

uno nuovissimo nel negozio in centro. Chiedono il prezzo e il commesso li informa che il computer costa 658 €, la stampante costa 79 € e lo scanner costa 124 €. Quanto dovrà spendere il papà di Luca per comprare tutto?»

I bambini hanno usato la calcolatrice per risolverli, ma solo nel primo periodo dell'anno, perché quando hanno capito come funziona il calcolo in colonna non l'hanno più chiesta se non «per non faticare» come a volte ha detto qualcuno.

All'inizio, le addizioni col cambio li hanno lasciati un po' perplessi perché non riuscivano a capire dove scrivere il numero. Ad esempio, di fronte all'addizione $328 + 65$, un bambino ha chiesto: «Maestra, ma qui quel 13 dove lo metto?», segno di una consapevolezza problematica raggiunta e non di una regola algoritmica da imparare. Sono bastate poche indicazioni per fargli esclamare «Ho capito!», rivelando grande gioia per la *sua* scoperta.

Sono state fatte anche altre proposte ai bambini creando storie insieme a loro. Per *situazioni problematiche concrete*, infatti, riferendoci a bambini di prima elementare, possiamo intendere anche quelle inerenti il loro mondo fantastico (con tutti gli 'eroi' che oggi porta con sé) che, data l'età, è assai presente e... concreto.

Trascriviamo di seguito, solo a mo' di esempio, alcune delle storie – problemi proposte in classe da bambini di I elementare; i testi venivano proposti da un bambino, ma rielaborati poi collettivamente da tutta la classe. I testi qui riportati sono l'esatta riproposizione di quelli elaborati nelle aule, a parte qualche piccolo aggiustamento di lingua italiana, dato che i problemi dovevano essere ufficializzati sul quadernone e mostrati a casa.

«Una volta Piedino con i suoi 5 amici Petrie, Spike, Triky, Ducky e Mordicchio passeggiavano per la Valle Incantata. I 6 amici incominciarono a mangiare le foglie stella. Piedino ne mangiò 103; Petrie ne mangiò 130; Spike ne mangiò 133; Triky ne mangiò 198; Ducky ne mangiò 110; Mordicchio ne mangiò 108.

Chi aveva mangiato più foglie? Quante erano tutte le foglie mangiate?»

«Nella fattoria di zioeppe c'erano 3 galline: Coccodina, Coccodella e Cocca. Un giorno zioeppe decise di contare tutte le uova che le sue

galline avevano fatto in 4 mesi. Coccodina 120; Coccodella 125 e Cocca 118.

Chi ne aveva fatte di più? Quante erano tutte le uova?»

«Babe, un maialino dolcissimo e coraggioso, viveva nella fattoria Okett insieme alle sue 36 sorelline e ai suoi 45 (QUARANTACINQUE) fratellini. Quanti maialini vivevano nella fattoria Okett?

Nella fattoria Okett viveva anche Ma, una pecorella molto simpatica insieme alle sue 85 (OTTANTACINQUE) sorelle giovani e alle sue 5 (CINQUE) sorelle vecchie. Quante pecore vivono nella fattoria Okett?»

I numeri in lettere scritti in stampato maiuscolo dell'ultimo testo non erano richiesti, ma il bambino - autore (Gianmarco) ha voluto metterli, imponendoli al resto della classe, affermando: «Ma io lo so che si scrive così e te lo voglio far vedere».

Si noti come i bambini, nel raccontare le storie dei loro personaggi preferiti, usano di preferenza l'imperfetto. La cosa è ovvia, ben rilevata da Rodari che diceva che tale tempo «è come un siparietto che si apre all'inizio di uno spettacolo». I bambini lo usano perché stanno giocando ad inventare una storia e fare il calcolo significa sapere come va a finire la storia... Forse è proprio per questo che con grande entusiasmo correvano alla calcolatrice e pigiavano i tasti.

Torniamo ai genitori ed al ruolo positivo che hanno avuto in questa sperimentazione.

A mo' di esempio, prendiamo una tipica insegnante titubante; poco dopo l'inizio dell'anno scolastico già asseriva per iscritto: «I genitori hanno ben accolto la proposta della sperimentazione, evidenziando che, in precedenti esperienze, hanno avuto modo di constatare che l'attività scolastica (per quanto riguarda la matematica) è troppo spesso slegata dalla vita reale». Questa accoglienza positiva le ha dato sempre il coraggio necessario, tanto che, a conclusione dell'anno, ha scritto entusiasta dicendo che ha avuto elogi dai genitori, dalle colleghe e dal dirigente scolastico. Afferma che nella sua (piccola) città si è diffusa la notizia di questo lavoro e alcuni genitori hanno trasferito i propri figli da altre scuole alla sua, chiedendo espressamente che fossero inseriti nella sua classe per poter lavorare in seconda in questo modo.

Ed infine, alcune considerazioni sui bambini, veri protagonisti di questa esperienza complessa.

La cosa più importante è che essi hanno avuto modo, durante l'anno, di mettere in gioco le conoscenze possedute, vedendosele valorizzate e non cassate. Hanno avuto il desiderio, il gusto di farlo perché coinvolti in attività che, oltre ad essere piacevoli, lasciavano loro ampie possibilità.

Se questa è la generalità, dobbiamo anche rilevare (alcuni, pochissimi) casi diversi; sarebbe bello raccontarli tutti, ma sarebbe troppo lungo; così, ci limitiamo ad un solo caso.

Una bambina macedone che frequenta una I in Umbria, sembra avere una visione del mondo completamente diversa da quella che consideriamo compartita in genere dai bambini italiani. È convinta che a scuola l'importante è copiare bene ed in questo è senza dubbio la migliore. Accetta tutto quello che le viene proposto, ma non partecipa mai alla "costruzione di sapere" in classe. Sembra che non abbia conoscenze, non ha mai il desiderio di saperne di più e nemmeno le attività proposte hanno inciso in questo. È risultata una delle migliori solutrici degli esercizi proposti come verifica, ma è assolutamente evidente che l'ha fatto solo per avere l'approvazione della maestra, dei compagni e dei genitori.

Diamo ora spazio ad interventi di bambini che discutono sull'andamento dell'aritmetica durante l'anno scolastico.

[Dobbiamo la seguente storia all'intervento narrativo di una straordinaria mamma che si è sempre dimostrata attenta alla sperimentazione].

Lorenzo ha avuto una spinta in più a venire a scuola volentieri perché non si è sentito piccolo come gli aveva preannunciato il fratello maggiore Leonardo. Spesso, quando litigano, esce fuori il fatto che lui, Lorenzo, è più piccolo e questo lo mette a disagio. Prima di iniziare la scuola, il fratello gli ha detto: Vedrai, ti faranno fare tanti pallini, tanti pulcini, tanti fiorellini, perché sei piccolo. Farai il primo giorno un pallino, il secondo giorno due... Tu fai la prima e in prima si fa così. A poco sono servite le proteste di Lorenzo basate sul fatto che lui quelle cose le sapeva già e che non aveva bisogno di fare quello che fanno i piccoli. Leonardo gli ha risposto che anche lui le sapeva già quando faceva la prima, ma le maestre gliel'avevano fatte fare lo stesso, senza chiedergli nulla e le ha dovute fare anche se non ne aveva voglia, perché era piccolo. La sorpresa c'è stata nei primissimi giorni di scuola, quando

Lorenzo è tornato a casa felice dicendo che lui no, non era piccolo perché a lui quelle cose la maestra non le faceva fare e raccontava tutto quanto si svolgeva in classe.

Altra sorpresa l'hanno avuta anche certi allievi di quinta guardando i cartelloni appesi alle pareti dell'aula dei bambini di prima. La cosa che li ha sorpresi di più è stata la linea dei numeri... così lunga e la competenza con cui i 'piccoli' l'hanno illustrata quando è capitato di stare tutti insieme.

Ancora, la differenza di comportamento generale dei bambini è deducibile da quanto afferma un'insegnante del gruppo che nella classe prima dove operava aveva come disciplina l'ambito antropologico; parlando dei bambini dichiara: «(...) io li trovo pieni di iniziative e con competenze».

Prima di concludere, vogliamo notare come spesso qui si parli di "competenze" e non di più semplici "conoscenze"; il discorso sarebbe complesso ed allungherebbe troppo questo testo, per cui preferiamo rimandare a D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla (2003).

9. Alcune brevi note a chiusura

Questo lavoro è un tipico prodotto in cui si mescolano attività di sperimentazione e di ricerca teso dunque a proporre segmenti curriculari per così dire 'innovativi'. In realtà, a noi sembra così scontato e banale, come idea, già nell'aria da sempre, che vogliamo solo metterne in evidenza alcuni punti, a mo' di conclusione.

Primo punto: i bambini.

I bambini sanno *davvero* molte cose sui numeri a 6 anni, quando entrano nella scuola elementare. Un bambino, a modo suo, cercava di spiegare la differenza tra i numeri e le cifre (ovviamente usando parole sue): una scoperta personale certo dettata dalla 'libertà' aritmetica in cui si è venuto a trovare. Penalizzarlo, obbligandolo a banalità, significa tarpare le ali della fantasia ma, quel che è peggio, obbligarlo a costruirsi immagini di scuola e di aritmetica negative, nefaste, primo passo verso la *scolarizzazione* dei saperi.

Secondo punto: gli insegnanti.

Spesso l'insegnante è il punto debole della catena. Non certo per sua colpa, ma per carenza di formazione professionale; questo è uno dei punti più dibattuti della ricerca attuale (Fandiño Pinilla, 2003).

Bisognerebbe che i corsi di formazione iniziale contenessero molta “didattica della matematica”, considerata proprio come *ferramenta* metodologica per dare coraggio e sviluppare le capacità critiche. Purtroppo c’è ancora molta confusione tra *insegnamento* ed *apprendimento* e così l’insegnante si illude che l’azione di apprendere del bambino coincida con l’azione dell’insegnare sua. L’insegnante si rifugia allora in stereotipi ed in materiali strutturati. Nulla sa, di solito, l’insegnante, circa la “trasposizione didattica” ed insegna al limite delle proprie competenze. Effettivamente, dunque, la trasposizione didattica sembra assente... Ma essa è almeno nascosta nel seguente fatto: la differenza d’età e di esperienza. L’insegnante non può insegnare l’aritmetica come la sa lui e la ‘deve’ trasformare; ebbene, questa trasformazione troppo spesso non è una ricostruzione dei saperi, adattati alla realtà d’aula, ma una banalizzazione, una infantilizzazione, una divulgazione (non è un caso che la stragrande maggioranza delle persone confonda la “didattica della matematica” con la divulgazione della matematica).

Se sopra abbiamo detto che ciò dovrebbe essere scopo dei corsi di formazione iniziale, ora però diciamo che questo tipo di formazione dovrebbe accompagnare l’insegnante per tutta la sua carriera. Così come un ingegnere, un medico, un tecnico, un fiscalista... già competente, riconosce di aver bisogno, abbastanza spesso, di ‘aggiornare’ le proprie competenze sulla base di nuovi strumenti che la tecnologia, la scienza, le nuove norme,... gli offrono, così anche un insegnante dovrebbe imparare a riconoscere questi suoi bisogni professionali. Ma *NON* è così: spesso, troppo spesso, l’insegnante non avverte questo bisogno, segno che la professionalità a scuola è in una situazione molto grave. Per spiegare ciò con una sola frase, dobbiamo ammettere che alcuni degli insegnanti che hanno fatto parte del gruppo di sperimentazione e ricerca hanno riconosciuto di averne tratto giovamento come se si trattasse di ‘un corso di aggiornamento’.

Terzo punto: la noosfera.

Genitori e dirigenti scolastici sono stati, per lo più, grandi fautori dell’innovazione (a parte casi sporadici di disinteresse, ma mai di opposizione). Il che significa che i tempi sono maturi per un’innovazione ragionevole della didattica dell’aritmetica nella scuola elementare.

Bibliografia

- Agli F., D'Amore B. (1995). *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia*. Milano: Juvenilia.
- Agli F., Martini A. (1989). *Spazio Tempo Eventi*. Roma: Armando.
- Agli F., Martini A. (1995). Rappresentazione e notazione della quantità in età prescolare. *Età evolutiva*. 51, 30-43.
- Baldisserrri F., D'Amore B., Fascinelli E., Fiori M., Gastaldelli B. e Golinelli P. (1993). I palloncini di Greta. *Infanzia*. 1, 31-34. [Questo articolo è stato ristampato su: *La matematica e la sua didattica*. 4, 1993, 444-449].
- Boero P. et al. (1985). Con questa citazione bibliografica vogliamo richiamare e rendere il dovuto merito al Nucleo di Genova per il progetto "Bambini, maestri, realtà: verso un progetto per la scuola elementare", più e più volte sperimentato (dal 1983) in provincia di Genova e Torino (e, parzialmente, anche di Bologna). In tale progetto si privilegiavano i "campi di esperienza", rispetto alla prassi 1-2-3-4... ancora in voga.
- Boero P., Scali E. (1996). Alcune ricerche sull'approccio al numero e alle operazioni aritmetiche nella scuola elementare. Seminario nazionale di ricerca, Pisa, 18-20 gennaio 1996.
- Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.
- Chevallard Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Grenoble*. Irem di Aix e Marsiglia.
- D'Amore B. (1980). *Approcci matematici nella scuola dell'infanzia*. Firenze: La Nuova Italia.
- D'Amore B. (1991). Ricerca-Azione, possibile paradigma della ricerca in didattica. *La Scuola Se*. 79-80, 14-17.
- D'Amore B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli.
- D'Amore B. (1994). *Lo spazio, l'ordine e la misura*. Roma: Valore Scuola.
- D'Amore B. (1996). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.
- D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (2001). *Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (2002). Basta con le cianfrusaglie! *La Vita Scolastica*. 8, 14-18.
- D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, epistemologiche, pedagogiche e concettuali della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). La "matematica del quotidiano". *La matematica e la sua didattica*. 3, 256-263.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I. (2004). "Esercizi anticipati" e "zona di sviluppo prossimale": comportamento strategico e linguaggio comunicativo in attività di *problem solving*. *La matematica e la sua didattica*. 1. In corso di stampa.
- D'Amore B., Godino J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica. Una sfida per il processo di insegnamento-apprendimento*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B., Marazzani I. (2003). *Problemi di matematica nella scuola primaria*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla M.I. (ed.) (2003). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.
- Fischbein E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi matematici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli – UMI. 122-132.
- Lucangeli D. (2001). Lo sviluppo della conoscenza numerica: le abilità cognitive. In: D'Amore B. (ed.) (2001). *Didattica della matematica e rinnovamento curricolare*. Atti del XV Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica", Castel San Pietro, 9-11 novembre 2001. Bologna: Pitagora. 97-106.
- Marazzani I. (2000). La matematica nella scuola dell'infanzia insegnata da maestri in erba. In: D'Amore B., Bagni G.T. (eds.) (2000). *Didattica della Matematica nel III millennio*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale XIV, Castel San Pietro Terme, 3-5 novembre 2000. Bologna: Pitagora. 195-201.
- Marazzani I. (2001). Diventare grandi insieme alla Matematica. Alcune esperienze nella Scuola dell'Infanzia. In: D'Amore B. (ed.) (2001). *Didattica della Matematica e rinnovamento curricolare*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale XV, Castel San Pietro Terme, 9-11 novembre 2001. Bologna: Pitagora. 146-156.
- Scali E. (1994). Costruzione dei significati del numero naturale in prima elementare: il ruolo dei "campi di esperienza" e la funzione mediatrice dell'insegnante. Seminario Nazionale di Ricerca, Pisa, 14-16 aprile 1994.
- Teruggi L.A. (2001). Scritture numeriche nella scuola dell'infanzia. In: D'Amore B. (ed.) (2001). *Didattica della matematica e rinnovamento curricolare*. Atti del XV Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica", Castel San Pietro, 9-11 novembre 2001. Bologna: Pitagora. 119-130.
- Vergnaud B. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berna: Peter Lang. [Trad. it. : 1994, Roma: Armando].